This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**A propos de ce livre**

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

**Consignes d'utilisation**

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

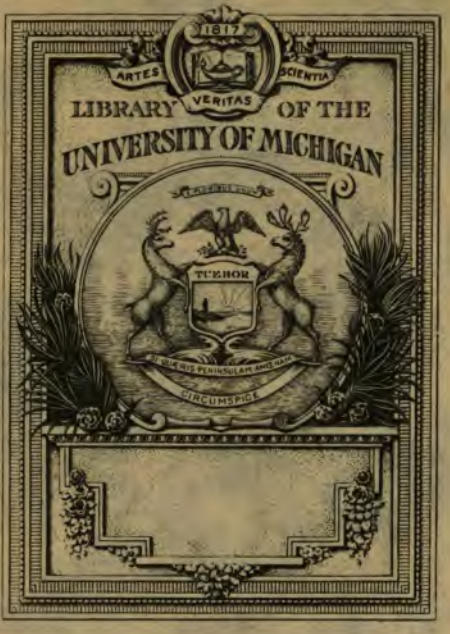
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

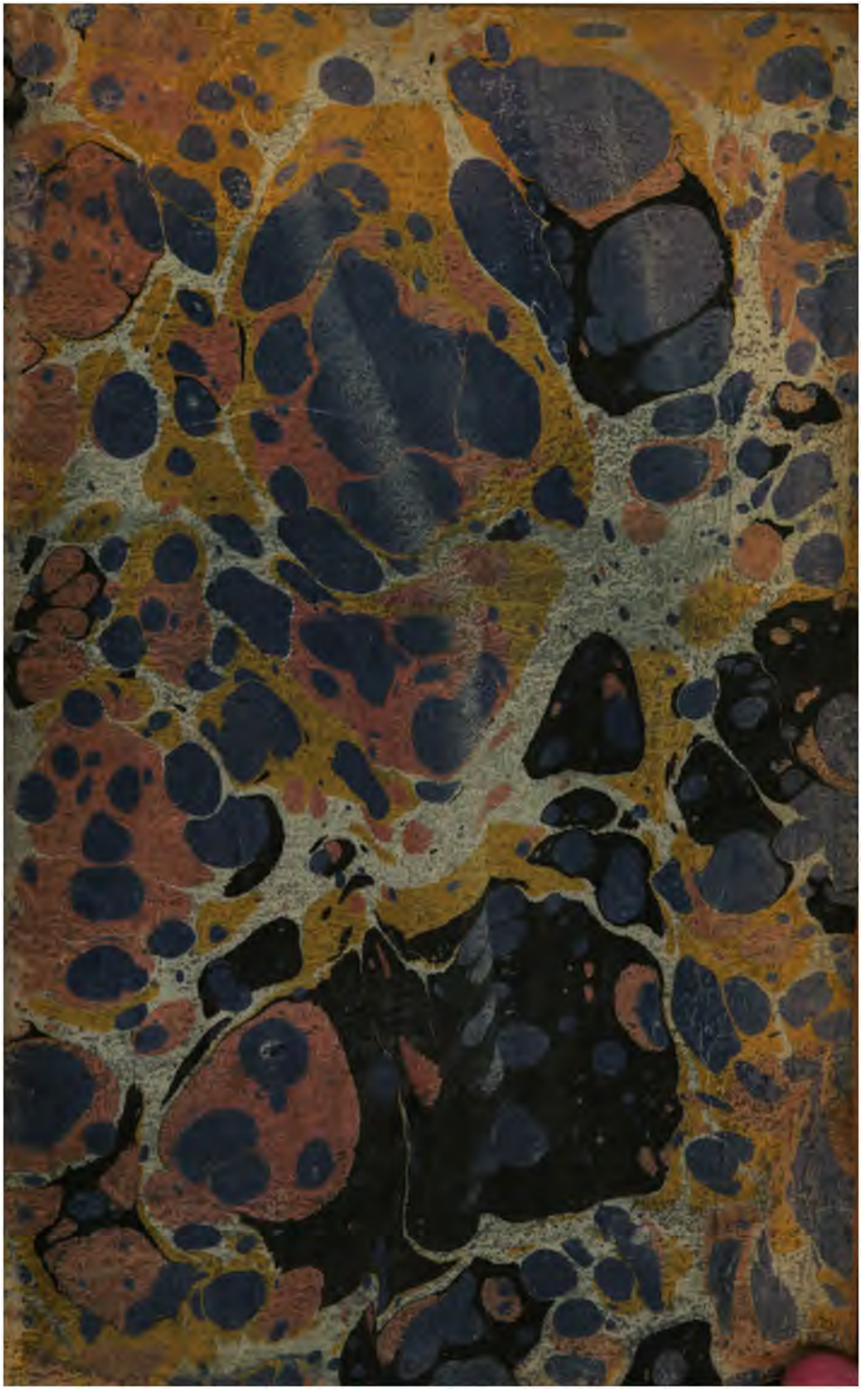
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

**À propos du service Google Recherche de Livres**

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE



Math
2 wk
$1.00
G
QA
35
.P84
v.1

# L'ALGÈBRE

SELON

SES VRAIS PRINCIPES.

# L'ALGÈBRE

## SELON

## SES VRAIS PRINCIPES,

Ouvrage dans lequel on prouve, par la raison et par le fait, que les principes du Calcul algébrique, usités jusqu'à présent, sont des sources d'erreurs qui conduisent à des résultats faux, diamétralement opposés à ceux de la bonne Algèbre, dont l'on donne les vrais principes.

TOME PREMIER.

2 vol. in-8°. br. 6 liv.

[Dom Donat Porro.]

A LONDRES,

Et se trouve à PARIS

Chez Barois l'aîné, Libraire, quai des Augustins.

Et à BESANÇON,

Chez la veuve Charmet, Libraire, Grand'rue.

1789.

Hist & Sci
Steckert
7-16-42
45945
2v

# INTRODUCTION.

Le lecteur sera sans doute surpris du titre de cet ouvrage, l'*Algèbre selon ses vrais principes.* Comme si les principes, dira-t-il, d'une science cultivée et perfectionnée par les plus grands géomètres, pouvoient, après un laps de temps immémorial, être soupçonnés d'erreurs ! Rien de plus séduisant que ce raisonnement. Mais les grands hommes étant hommes, conséquemment sujets à erreurs, comme il seroit aisé de le prouver par une multitude de faits, on peut très bien, sans avoir l'étendue de leurs lumières, ou de leurs connoissances, envisager les mêmes objets sous un point de vue qui leur aura échappé. Se soumettre aveuglément à l'autorité des savans, c'est dire, *tout est bien;* c'est arrêter les progrès des sciences et des arts, dont on ne sauroit fixer les limites.

Le lecteur reviendra encore plus aisément de sa surprise, s'il daigne faire attention que ce principe si généralement reçu, *moins* par *moins* donne *plus*, a toujours choqué l'oreille et la raison, mis en déroute les plus fameux

calculateurs, occasionné des contestations et des disputes interminables sur les quantités négatives, les racines imaginaires, le cas irréductible, les exposans et les logarithmes négatifs, sur ces proportions ridicules —1 : +2 : : +2 : —4, et tant d'autres altercats consignés dans les mémoires des plus célèbres académies, monumens authentiques, qui attesteront à la postérité l'existence des mauvais principes qui ont dirigé jusqu'à présent les calculateurs, en les conduisant à des résultats faux et diamétralement opposés à ceux de la véritable algèbre.

Le mal, quoique invétéré, n'en est pas plus difficile à guérir. Pour y remédier, on a supprimé ce principe non moins déraisonnable que vicieux, *moins par moins donne plus;* et l'on a posé pour base du calcul algébrique, *plus par plus donne plus,* et *moins par plus donne moins.* De ces deux principes émaneront deux ordres de calcul, l'ordre positif et l'ordre négatif. Chaque ordre sera dirigé par des règles particulières et conformes à la nature des quantités qu'il embrasse.

Un moyen si simple fait disparoître tous les

inconvéniens. Les racines imaginaires, pures chimères, la honte du calcul, ne déshonoreront plus l'algèbre ; le cas irréductible n'aura plus lieu ; les multiplicateurs, les quotiens, les exposans, tous nombres abstraits, essentiellement positifs, conserveront leur nature. Ces anti-proportions géométriques $-1 : +2 :: +2 : -4$, ainsi que les progressions et séries alternatives qui en dépendent, seront éliminées. On ne connoîtra plus le nom de paire et d'impaire dans le calcul des puissances ; celles de l'ordre négatif seront toutes négatives, comme celles de l'ordre positif, toutes positives.

Si aux principes de ces deux ordres de calcul, on ajoute l'unité de racine dans une équation quelconque, ce qui répond à l'unité de multiplicande dans un produit, la géométrie des courbes se trouvera dégagée d'une infinité de nœuds, de points et de lignes superflues. A chaque abscisse répondra une seule ordonnée ; les lois d'une même équation présideront à la direction des branches tant positives que négatives des courbes, qui différeront en position, et nullement en figure.

On verra dans le corps de cet ouvrage, combien les algébristes se sont éloignés de la vérité, soit par indifférence pour une saine métaphysique, soit par un effet de leur penchant excessif pour la généralisation dans laquelle ils ont enveloppé tous les cas d'exception. Nous pouvons citer pour exemple le fameux binome de Newton, qui induit en errreur lorsqu'on en fait l'application aux quantités de l'ordre négatif. On demande, par exemple, la seconde puissance de $-a-b$, la formule du binome donne $+a^2+2ab+b^2$, seconde puissance diamétralement opposée à la véritable $-a^2-2ab-b^2$. On demande le carré de la différence négative $-5+2$ qui est $-9$, la formule de Newton donne $+9$, carré de la différence positive $+5-2$, c'est-à-dire le contraire de ce qu'on demande et du véritable résultat.

Comme l'on ne s'est point proposé d'entrer dans tous les détails qu'exigeroit la science du calcul, mais seulement d'en établir les vrais principes, nous pensons en avoir dit suffisamment dans cet ouvrage pour donner lieu à un traité complet d'algèbre, et pour mettre d'autres

écrivains à même de ramener à ces principes ceux que la méthode ordinaire pourroit avoir induits en erreur. Voici le plan de l'ouvrage.

---

On commence par la définition de l'algèbre et l'énumération des instrumens qu'elle emploie dans ses opérations, qui sont les lettres, les chiffres et les signes. On fait observer touchant ces derniers, que les signes + et — étant susceptibles de quatre interprétations différentes, ont jeté l'erreur et la confusion tant en algèbre qu'en géométrie. A ces préliminaires succèdent les opérations sur la quantité; savoir :

1°. L'addition algébrique, dans laquelle on n'a ajouté que des unités homogènes, c'est-à-dire unités positives à unités positives, unités négatives à unités négatives; en quoi on s'est éloigné de l'usage ordinaire des auteurs, qui mêlent indistinctement les positives avec les négatives pour composer une somme d'unités hétérogènes, ce qui répugne à la nature de l'addition.

2°. La soustraction algébrique divisée en trois classes. La première, dans laquelle la quantité

à soustraire étant de même espèce algébrique, se trouve plus foible que celle dont on soustrait, porte le nom de soustraction rigoureuse. La seconde, dans laquelle la quantité à soustraire étant de même espèce algébrique, et se trouvant plus forte que celle dont on soustrait, porte le nom de soustraction par emprunt. La troisième, dans laquelle les quantités, étant de différente espèce algébrique, sont rappelées à une même espèce pour pouvoir être ajoutées, porte le nom de différence additionnelle.

3°. La multiplication algébrique, dans laquelle on n'a fait usage que de ces deux principes, *plus par plus donne plus*, *et moins par plus donne moins*, ce qui exclut les produits de *moins* par *moins* et de *plus* par *moins*, conséquemment tout multiplicateur négatif. De ces deux principes résultent deux ordres de calcul, l'ordre positif et l'ordre négatif, qui sont diamétralement opposés entre eux, en ce que les quantités de l'un détruisent les quantités de l'autre.

On a renfermé dans quatre problèmes les différens cas de la multiplication relativement aux deux ordres de calcul. Dans le premier

problême on demande d'effectuer le produit de deux facteurs binomes positifs, tels que $a + b$ par $c + d$. Dans le second on demande le produit de deux facteurs binomes négatifs proposés, tels que $-a-b$ et $-c-d$. Pour en effectuer le produit on a changé le second facteur en $+c+d$, pour avoir un multiplicateur abstrait positif. Dans le troisième, on demande le produit de la différence rigoureuse $+a-b$ par $+c-d$; et parce que les deux facteurs sont positifs, en ce que $a > b$ et $c > d$, on les a multipliés comme ils étoient proposés. Dans le quatrième, on demande le produit de la différence par emprunt $+a-b$ par $+c-d$; et parce que dans une différence par emprunt les deux facteurs sont négatifs, par la raison que $a < b$, et $c < d$, on a changé le facteur négatif $+c-d$ en $+d-c$ pour en former un multiplicateur positif. On a fait observer que le multiplicateur ne faisoit jamais partie du produit, et qu'un produit étoit toujours faux, lorsqu'il n'étoit pas de l'espèce algébrique de son multiplicande.

4°. La division algébrique, dont les règles pour les signes sont réduites à deux, *plus dans plus*

*donne plus, et moins dans moins donne plus*, ce qui exclut *plus* dans *moins* et *moins* dans *plus*, conséquemment tout quotient négatif. On a renfermé dans quatre problêmes les différens cas de la division ; et parce que la division est une opération inverse de la multiplication, on a proposé pour dividende les produits des quatre problêmes de la multiplication, et pour diviseur leur multiplicande, afin d'en extraire les multiplicateurs sous le nom de quotient. L'analogie qui se trouve entre la soustraction et la division, a fait distinguer cette dernière en division rigoureuse, division par emprunt et division additionnelle. On a prouvé que toute division, dont le dividende et le diviseur étoient de différens ordres, l'un positif, l'autre négatif, donnoit des quotiens infinis, conséquemment nuls et de nul effet.

Les fractions algébriques succèdent à la division. Après avoir donné la méthode de réduire les fractions au même dénominateur, on a renfermé dans un même problême les quatre opérations principales dont elles sont susceptibles. Les fractions proprement dites appartiennent

à la division par emprunt, dont le dividende est toujours plus foible que le diviseur.

La formation des puissances est à la suite des fractions; elle consiste en quatre tables pour les puissances monomes, et quatre tables pour les puissances binomes, dont les multiplicateurs sont tous positifs. On a distingué dans les premières tables les lettres multiplicateurs des lettres multiplicandes, pour indiquer que les multiplicateurs ne faisoient jamais partie, ni des puissances, ni des produits; et parce que cet avertissement suffit, on a négligé cette distinction dans les autres : mais on ne doit jamais perdre de vue, que les multiplicateurs sont exclus de la composition des puissances et des produits, dont ils ne peuvent faire partie.

On a donné une table pour transformer la division en soustraction de puissance, dans laquelle le signe + fait la fonction de multiplicateur, et le signe — la fonction de diviseur. On a distingué dans cette table les trois cas de la soustraction. Le plus remarquable est celui de la division additionnelle, dans laquelle les signes du dividende et du diviseur étant de dif-

férens ordres, l'expression du quotient se résout en un produit-puissance : telle est l'expression $\frac{+a^2}{-a^3} = +a^5$.

Ces calculs sont, dans l'un et l'autre ordre, positifs et négatifs. On a joint à toutes ces opérations des exemples purs et simples, faciles à saisir et évaluer, parce que l'essence des règles réside également dans les exemples les plus simples comme dans les plus composés.

Pour faire sentir les avantages des nouveaux principes sur les anciens, on a cité une opération de calcul concernant les quantités radicales avec des multiplicateurs négatifs, dont le résultat est une erreur qu'il n'est pas possible de porter plus loin ; il péche non seulement en quantité et en qualité, mais il se trouve de plus opposé aux principes mêmes du calculateur.

On a placé à la suite du calcul des puissances la résolution des fractions en suites infinies. On a pris pour formule $\frac{1}{a-1}$ avec la supposition de $a > 1$, pour rendre le numérateur et le dénominateur de même espèce algébrique, et la

suite nécessairement convergente, condition nécessaire pour que la série soit plus foible que l'unité, et ne pas tomber dans les inconvéniens qui résultent de la formule $\frac{1}{1-a}$ proposée par l'auteur de l'analyse déterminée, qui donne des séries divergentes quand $a > 1$, et des séries plus fortes que l'unité lorsque $a < 1$, c'est-à-dire, dans le premier cas, des séries de produits au lieu de quotiens, et dans le second, des séries plus fortes que l'entier au lieu de séries de fractions. Le même auteur extrait aussi des suites infinies de la formule $\frac{1}{1+a}$, dont les termes ayant alternativement les signes + et —, tels que $+ 1 - a + a^2 - a^3 + a^4$, etc. sont composés de proportions anti-géométriques $+ a^2 : - a^3 :: - a^3 : + a^4$, dont le produit des extrêmes $+ a^6$ est diamétralement opposé au produit des moyens $- a^6$.

Des suites infinies on passe aux raisons, proportions, progressions tant arithmétiques que géométriques, dans lesquelles on conserve toujours l'homogénéité des termes dans la compo-

sition des rapports, condition essentielle sans laquelle il n'y auroit ni raison, ni proportion. Ces raisons, proportions, progressions, tant arithmétiques que géométriques, sont divisées en positives et négatives relativement aux deux ordres de quantité.

De la correspondance des progressions arithmétiques et géométriques, résultent les différens systêmes de logarithmes. On s'est attaché au plus intéressant, celui des tables ordinaires, dans lequel on observe, qu'aux seules unités entières de la progression géométrique décuple ascendante, répondent de vrais logarithmes, qui sont les termes de la progression arithmétique des nombres naturels en commençant par zéro; mais que les unités fractionnaires en progression décuple descendante, manquent totalement de logarithmes.

En réfléchissant sur le grand nombre d'erreurs qui résultent des anciens principes d'algèbre, et le grand nombre de vérités qui émanent des nouveaux, il est venu en pensée de diviser le calcul algébrique en calcul ancien et calcul nouveau dont on trace la différence, ce qui ne ser-

vira pas peu à éclaircir la matière et dissiper beaucoup de préjugés.

Vient ensuite la partie intéressante des équations. On commence par les notions primitives, leur définition, leur formation, le dégagement de l'inconnue, dont on fait l'application à des exemples d'équations du premier degré. De là on passe aux équations du second, que l'on divise *en équations-produits et équations-puissances,* l'une et l'autre pouvant être pures, ou mixtes et complètes. On donne plusieurs exemples d'équations pures, tant dans l'ordre positif que négatif; et pour mieux observer le contraste des deux ordres, on a placé sur deux colonnes les opérations respectives qui ont concouru à la résolution d'un problême pris dans deux acceptions contraires.

On a fait succéder à la résolution des équations pures du second degré, la résolution des équations complètes du même degré, provenant de deux facteurs binomes égaux ou inégaux; et parce que dans de pareilles équations ordonnées, le coefficient du second terme exprime la somme des facteurs, et le troisième terme en exprime

le produit, quantité l'une et l'autre toujours connue, l'on a extrait de ces propriétés une formule générale pour la résolution des équations complètes du second degré. La réunion des deux parties de cette formule donne la même formule que celle de Cardan pour la résolution des équations du troisième degré. L'usage de la première, en parties séparées, n'exige l'évanouissement d'aucun terme de l'équation; il n'en est pas de même quand les deux parties sont réunies, il faut nécessairement faire évanouir le second terme de l'équation pour la résoudre. Nous donnons des exemples de résolution dans l'un et l'autre cas.

Des équations complètes du second degré, on passe à celles du troisième, du quatrième, du cinquième, etc. qui se résolvent toutes par la même formule. On compare terme à terme l'équation à résoudre à l'équation générale relative à son degré; la seule substitution des résultats en place des lettres de la formule, donne la valeur de la racine. On a fait observer que de tous les facteurs qui concourent à former une équation composée, qui n'est autre chose

qu'un produit, un seul étoit racine ou multiplicande; les autres, en qualité de multiplicateurs, n'en pouvoient faire partie, leurs unités étant des unités de fois entièrement hétérogènes aux unités du multiplicande.

Cette formule remarquable pour la résolution des équations de tous les degrés, n'est autre chose que l'expression du théorème suivant. *La moitié de la somme de deux quantités quelconques, plus la moitié de leur différence, est égale à la plus grande: La moitié de la même somme, moins la moitié de la différence, est égale à la plus petite;* d'où il suit, que si les quantités sont des carrés, des cubes, des quatrièmes, cinquièmes puissances, etc. les racines de la moitié de la somme des carrés, plus la moitié de leur différence ajoutée à la moitié de la somme moins la moitié de leur différence, donneront la valeur de la racine. Si les quantités sont des cubes, la racine troisième de la moitié de la somme des cubes, plus la moitié de leur différence ajoutée à la moitié de la même somme moins la moitié de la différence, donnera la racine de l'équation cubique proposée.

Il en sera de même de la racine d'une équation quelconque, de quelque degré qu'elle puisse être, tant dans l'ordre positif que négatif, sans imaginaires.

On a fait succéder à l'algèbre son application aux lieux géométriques, en faisant précéder ceux qui appartiennent aux sections coniques. On a extrait de leurs équations des suites d'ordonnées positives et négatives. Les positives adhèrent à des axes positifs, les négatives à des axes négatifs, conformément à leur ordre et à leur espèce. On évite par là les courbes amphibies, moitié positives, moitié négatives, dont une partie annullant l'autre et réciproquement, réduit à zéro la totalité de la courbe, de sa superficie et de sa solidité.

On a extrait de l'analyse des courbes par M. Cramer, des exemples de branches négatives, dont l'irrégularité, la bizarrerie et la difformité choquent également l'œil et la raison. Il n'en est pas de même de celles qui sont tracées selon les vrais principes du calcul; les branches positives et négatives ne diffèrent qu'en position, nullement en figure. Elles diffèrent en position, parce

que la position et contre-position sont le distinctif du positif et du négatif; elles ne diffèrent point en figure, parce que résultant d'une même équation, l'une et l'autre branche doivent porter les mêmes traits.

Après cette brièvе application de l'algèbre à la géométrie, on donne la récapitulation des erreurs qui affectent toutes les opérations du calcul algébrique. On termine l'ouvrage par plusieurs problêmes à résoudre, réputés impossibles et insolubles, en faisant usage des anciens principes, et dont la résolution est très facile, selon les nouveaux, qui ne renferment point de quantités imaginaires.

C'est donc une preuve démonstrative de la supériorité des nouveaux principes sur les anciens, que de proposer des problêmes inaccessibles à ces derniers. Les algébristes disent unanimement que, demander la racine d'une quantité négative, c'est demander une chose impossible. Voici comment s'explique sur cela l'auteur de l'analyse déterminée, pag. 105:

« Toutes les expressions, comme $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, « $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$, etc. sont des nombres impos-

« sibles ou imaginaires, puisqu'ils indiquent « des racines de quantités négatives; et c'est de « pareils nombres qu'on soutient, avec raison, « qu'ils ne sont ni rien, ni plus que rien, ni « moins que rien, ce qui fait principalement « qu'on est obligé de les déclarer impossibles. »

On voit par là que les quantités imaginaires sont des barrières insurmontables à la résolution des problêmes. On ne peut donc nier que ce soit un avantage d'affranchir le calcul de pareils obstacles.

# L'ALGÈBRE

## SELON

## SES VRAIS PRINCIPES.

L'ALGÈBRE est un calcul par lettres qui sert d'instrument à l'analyse, tant pour la démonstration des théorèmes, que pour la résolution des problêmes de mathématiques.

Le calcul par lettres diffère du calcul par chiffres, en ce que les lettres représentent des unités indéterminées non seulement quant à l'espèce, mais encore quant au nombre, au lieu que les chiffres représentent des unités indéterminées quant à l'espèce, mais déterminées quant au nombre. Le chiffre 7, par exemple, est indéterminé quant à l'espèce des unités, parce qu'il peut représenter des hommes, des années, des toises, des écus, etc., mais il est déterminé quant au nombre, n'en pouvant représenter que 7, ni plus ni moins. La lettre *b* au contraire,

outre toute espèce d'unités, peut encore représenter toute sorte de nombres, soit entiers, soit fractionnaires.

Le calcul par lettres a un grand avantage sur le calcul par chiffres, qui est celui de conserver aux yeux du calculateur la marche de ses opérations, et lui faire distinguer dans l'expression d'une somme $a+b$, les parties $a$ et $b$ qui la composent, ce qu'il ne peut appercevoir dans la somme 15, dont les parties eussent été 7 et 8. Pareillement d'appercevoir dans le produit $bc$ les facteurs $b$ et $c$ totalement perdus pour lui dans le produit 42, dont les facteurs eussent été 6 et 7.

Un autre avantage du calcul par lettres est de pouvoir faire sur les grandeurs inconnues les mêmes opérations que l'on fait sur celles qui sont connues, ce que l'on ne pourroit exécuter avec le calcul numérique, par la nécessité de ne pouvoir écrire 7, 10, 15, que lorsqu'on connoît le nombre de leurs unités ; mais il n'en est pas de même des lettres $x$, $y$, $z$ que l'on peut ajouter, soustraire, multiplier, diviser, etc. sans connoître en aucune façon leur valeur.

Le calcul par lettres a pour objet la quantité, laquelle, considérée sous différens rapports, forme l'objet de plusieurs sciences : nous la considérons ici comme objet de l'algèbre.

## DE LA QUANTITÉ.

La quantité, généralisée en tant que susceptible de plus et de moins de rapports et comparaisons, est précisément l'objet de l'algèbre, laquelle ne s'attachant à aucune espèce particulière de quantité, s'applique à toutes indistinctement, et domine sur toutes les sciences qui ont pour objet une espèce particulière de la quantité générale. C'est ainsi que l'on voit l'algèbre s'appliquer à la géométrie qui mesure l'étendue, à l'astronomie qui mesure le temps, à la physique qui mesure le mouvement, tous objets différens qui sont autant d'espèces particulières de quantité.

La quantité générale n'ayant point de limite, soit en plus, soit en moins, aucun degré d'augmentation ou de diminution n'en peut fixer le terme, et aucun signe arbitraire le représenter. Cependant en algèbre on donne le trait $\infty$ comme

le signe représentatif d'un infiniment grand; et après cette détermination, on en fait le signe représentatif d'un tiers, d'un quart, d'un vingtième, comme si un quart, un tiers, un vingtième pouvoient offrir l'idée d'un infiniment grand. Cependant il est visible que $3\infty$, $4\infty$, $20\infty$ sont des expressions dans lesquelles le signe $\infty$ ne fait la fonction que d'un tiers, d'un quart et d'un vingtième.

Il en est de même des expressions $\frac{1}{0}$ et $\frac{0}{1}$, dont la première, supposée représenter un infiniment grand, ne représente rien du tout, puisqu'étant mise sous la forme d'un rapport impossible, l'expression est nulle par le fait. Nous disons rapport impossible, parce que les termes d'un rapport doivent être homogènes, et que le rien et l'unité réelle ne le sont point. Il faut penser la même chose de la seconde expression $\frac{0}{1}$ que l'on dit représenter un infiniment petit. On voit par là l'impossibilité de trouver des signes représentatifs d'un infiniment grand et d'un infiniment petit; preuve convaincante que l'esprit humain ne peut traiter l'infini sans altérer les principes du raisonnement.

Les quantités, dont les degrés d'augmentation répondent à l'addition, ont été appelées par les premiers algébristes, *quantités positives;* celles au contraire, dont les degrés de diminution répondent à la soustraction, ont été appelées *négatives,* en conséquence de leur opposition avec les premières. Mais les algébristes qui ont succédé, ont donné, par une favorable extension de cette idée d'opposition, les noms de positif et négatif aux deux membres d'une opposition quelconque. Par exemple, la direction du sud au nord est opposée à la direction du nord au sud : si donc on appelle la première *positive*, la seconde sera *négative.* La gauche est opposée à la droite; la position d'une ligne placée à gauche étant prise pour négative, sa contre-position à droite sera appelée positive. Un mouvement accéléré étant pris pour positif, le mouvement retardé sera négatif, et ainsi de toute opposition quelconque.

Par cette voie, les algébristes et géomètres se sont procuré des différences pour parvenir à la connoissance des rapports, ce qu'ils n'auroient pu obtenir dans beaucoup de circons-

tances, sans cette distinction. On voit par là que les négatives, quant à la quantité absolue, sont aussi réelles que les positives, puisque l'on peut prendre indistinctement pour négatif l'un ou l'autre membre d'opposition. D'où il suit que les quantités positives et négatives sont essentiellement des quantités relatives en sens contraire, qui s'effacent mutuellement en tout ou en partie, comme on peut se le représenter par la supposition de deux chevaux attelés tirant en sens opposé l'un et l'autre avec 700 degrés de force. Dans ce cas, les quantités de forces absolues étant égales, et les quantités relatives en sens contraire, se détruisent en totalité, ensorte que l'on a $+700-700=0$; mais si l'un des chevaux tiroit avec 700 degrés de force, et l'autre avec 500 seulement, on auroit $700-500=200$ pour l'expression des forces restantes, laquelle, mise sous cette forme $200+500-500=200$, fait voir que les seules quantités qui formoient le rapport d'opposition $+500-500$ ont été effacées, et la valeur absolue $+200$ a été conservée. Tels sont les effets des quantités positives et négatives de se

détruire réciproquement en tout ou en partie.

La quantité générale et indéterminée prend le nom de *quantité abstraite*, et les quantités particulières, celui de *quantité concrète*. Cette distinction est très essentielle dans le calcul algébrique, où les multiplicateurs, comme quantités abstraites, représentant des unités de fois, ne font jamais partie du produit, entièrement composées d'unités de l'espèce du multiplicande. La quantité algébrique est susceptible de toutes les opérations que l'on fait sur la quantité numérique; mais pour y procéder, l'algèbre emploie les lettres, les chiffres et les signes, qui feront l'objet des trois articles suivans.

## DES LETTRES.

La quantité générale étant l'objet de l'algèbre, cette dernière emploie des signes généraux pour la représenter. La figure de ces caractères est indifférente par elle-même; mais parce que l'algèbre est un langage, il faut des caractères de convention pour l'entendre. Les algébristes sont donc convenus d'employer à cet effet les

lettres de l'alphabet, $a$, $b$, $c$, $d$, etc., lesquelles, n'ayant aucune valeur par elles-mêmes, les peuvent toutes représenter. La lettre $b$, par exemple, peut aussi bien être le signe représentatif de 5, de 8, de $\frac{1}{4}$, que de 9, de 12, de $\frac{5}{17}$, etc.

Les lettres renferment dans leurs expressions générales celles de tous les nombres et de toute espèce de quantité ; et parce que dans la résolution des problêmes, on demande ordinairement des valeurs particulières plutôt que des valeurs générales, on peut substituer à chaque lettre une valeur particulière : mais quand une lettre a reçu dans un problême sa détermination, on ne peut plus la changer ; elle perd alors sa généralité.

Les lettres, quoique signes généraux, perdent leur généralité, lorsqu'elles font les fonctions de limites, ou celles de multiplicateur, nombre abstrait, qui ne peut représenter ni unité concrète, ni unité négative. Par exemple, dans ces expressions, $x \times y$, $z \times ts$, les lettres $y$, $t$ et $s$ ne peuvent représenter ni unités concrètes, ni unités négatives.

Dans les problêmes d'algèbre il y a des quantités

que l'on connoît, et d'autres que l'on ne connoît point et que l'on cherche. Pour représenter les quantités connues, on se sert des premières lettres de l'alphabet, $a$, $b$, $c$, $d$, etc. ; et pour désigner les quantités inconnues, on emploie les dernières, $x$, $y$, $z$. Les résultats algébriques composés de lettres ne sont point des opérations finales, ils ont besoin d'être évalués ; pour cet effet, on a recours au calcul numérique, qui est le complément du calcul algébrique.

## DES CHIFFRES.

Les chiffres sont des caractères que l'algèbre emprunte de l'arithmétique, comme la chronologie, la géographie et autres sciences les empruntent, sans faire partie de ces sciences. Les lettres, et non les chiffres, sont le caractère distinctif de l'algèbre. On rencontre souvent dans les expressions algébriques, des chiffres minuscules placés à droite et un peu au dessus du caractère littéral. Ce petit chiffre indique le nombre de lettres accolées qui composent la puissance, et porte le nom d'*exposant*. C'est une

abréviation de calcul qui dispense d'écrire un certain nombre de lettres; par exemple, au lieu d'écrire $aaaaa$, il suffit d'écrire $a^5$, qui signifie la même chose, c'est-à-dire, la 5e puissance de $a$. Quand le chiffre précède la lettre, comme dans cette expression $5a$, il porte le nom de *coefficient*, et représente la somme $a+a+a+a+a$.

Lorsqu'il s'agit d'évaluer une expression algébrique, on fait encore usage des chiffres, en employant les opérations propres à l'arithmétique. Par exemple, si l'on donne à évaluer l'expression $a+b$ qui représente une somme, et que l'on détermine la lettre $a$ à signifier 12, et la lettre $b$ à signifier 8, en ajoutant 8 à 12, on aura 20 pour la valeur de l'expression $a+b$. Si on vouloit évaluer le produit $ab$, en conservant aux lettres les mêmes valeurs que ci-dessus, on multiplieroit 12 par 8, et le produit 96 donneroit la valeur de l'expression $ab$. On voit par là la facilité de transformer le calcul algébrique en calcul numérique.

De tous les chiffres, le plus intéressant est celui qui représente l'unité, parce que l'unité est le principe et l'ame du calcul. Sans elle on

ne peut ni nombrer, ni peser, ni mesurer, ni comparer. Pour nombrer, c'est l'unité répétée ou divisée que l'on emploie. Pour peser, c'est l'unité de livre, d'once, de gros, etc. Pour mesurer, c'est l'unité de toise, de pied, de pouce, etc. Pour comparer, c'est l'unité abstraite qui sert d'antécédent au premier rapport, comme on le verra dans la suite, lorsqu'on traitera des raisons et proportions géométriques.

On distingue dans cet ouvrage deux espèces d'unités de calcul, l'*unité-coefficient* et l'*unité-puissance*. L'unité-coefficient est celle qui précède une quantité quelconque, la rend une et la sépare de toute autre. Les algébristes la suppriment ordinairement à cause de son universalité; c'est ainsi qu'ils disent une fois $b$ est $b$, une fois 5 est 5, et qu'ils écrivent $b$, 5, au lieu de $1 \times b$, $1 \times 5$. L'unité-puissance est celle qui mesure les élémens des puissances, parce qu'il n'y a point d'élément qui ne soit composé d'unités de son espèce et de même dimension, et comme les puissances sont des élémens de calcul, elles doivent avoir des unités relatives à leurs élémens et à leurs dimensions.

Pour se former une idée de ces unités-puissances, soit la série 10, 100, 1000, 10000, ou $10^1$, $10^2$, $10^3$, $10^4$, $10^5$, etc. qui exprime les puissances successives de 10, on divisera chaque terme par son égal, ce qui donnera $\frac{10^1}{10^1}$, $\frac{10^2}{10^2}$, $\frac{10^3}{10^3}$, $\frac{10^4}{10^4}$, $\frac{10^5}{10^5}$, ou $1^1$, $1^2$, $1^3$, $1^4$, $1^5$, etc. unités qui seront la mesure homogène des puissances de la progression primitive donnée. Il est constant que l'unité linéaire, qui correspond à la première puissance 10, ne peut être la mesure de la seconde puissance 100, ni d'aucune autre supérieure; autrement la toise courante seroit la véritable mesure des surfaces et des solides. C'est donc pécher contre l'homogénéité des dimensions, que d'égaler la suite d'expression $\frac{10^1}{10^1}$, $\frac{10^2}{10^2}$, $\frac{10^3}{10^3}$, $\frac{10^4}{10^4}$, etc. à la suite des unités similaires 1, 1, 1, 1, etc.

L'homogénéité des quantités dans les sommes, les produits, les rapports, est un objet auquel on ne peut trop faire attention. Les algébristes paroissent l'avoir trop négligée, en confondant les quantités concrètes avec les quantités abs-

traites ; les unités linéaires avec les unités-puissances ; en formant des rapports entre quantités incomparables, le fini et l'infini, le rien et le réel ; en composant des sommes d'unités positives et d'unités négatives qui s'excluent mutuellement, ce qui ne peut que jeter de la confusion dans les opérations, et de l'incertitude dans les résultats.

## DES SIGNES.

Les signes généralement parlant en fait de calcul, sont des traits ou des points qui suppléent, d'une manière abrégée, à certains mots, ou à certaines expressions que l'on est obligé d'employer fréquemment. Mais en algèbre, par le mot *signe*, on entend ordinairement les signes + et — qui signifient *plus* et *moins*, dont il est à propos de donner une ample explication.

On a dit que les quantités positives et négatives étoient des quantités correlatives opposées et de différens ordres, qui se détruisoient mutuellement. Pour distinguer ces deux espèces de quantités, les algébristes ont donné aux positives le signe +, et aux négatives le signe — ;

et quand ils ont voulu caractériser les opérations, qui ont produit ces quantités, ils leur ont encore donné les mêmes signes, ensorte que l'addition porte le signe +, et la soustraction le signe —. D'où il suit que pour exprimer les unités contenues dans $+5a$, il faudroit écrire $++5a$. Le premier signe seroit signe d'opération, et le second, signe de quantité, ce qui diroit somme des unités positives contenues dans $+5a$. Pour les négatives, il faudroit écrire $+-5a$, ce qui diroit somme des unités négatives contenues dans $-5a$.

Quant à la soustraction des unités positives, l'expression seroit $-+5a$, ce qui désigneroit la soustraction des unités positives contenues dans $+5a$. Et pour celle des quantités négatives, on écriroit $--5a$, ce qui indiqueroit la soustraction des unités négatives contenues dans $-5a$. Il est évident que ce double signe — — équivaut au signe + positif, parce que soustraire ce qui rendoit une quantité négative, c'est la rétablir dans son premier état positif.

Comme ces doubles signes chargeroient beaucoup le calcul, pour y obvier on a observé que

$+ + 5a$ se réduisoit en valeur à $5a$. On est donc convenu qu'une quantité algébrique qui ne seroit précédée d'aucun signe, seroit censée positive, conséquemment que, quand elle seroit précédée du signe $+$, le signe seroit signe d'opération et non de quantité. Pareillement ayant observé que $+ - 5a$ se réduisoit en valeur à $-5a$, on a supprimé le signe $+$ d'opération, et on a laissé subsister le signe $-$ de quantité, qui désigne une quantité négative. La suppression de pareils signes a l'avantage de simplifier le calcul, et en même temps le désavantage d'en rendre équivoques les expressions, et de faire perdre aux yeux du calculateur la marche de ses opérations, souvent même d'induire en erreur par des substitutions mal conçues. Telle est la substitution du signe $+$ quantité positive au double signe $- -$ qui représente la soustraction d'une quantité négative, dont les idées, totalement différentes, ont occasionné beaucoup d'erreurs, et donné lieu à des théorèmes faux, comme on le verra dans suite.

Les signes $+$ et $-$ ne sont pas seulement signes de quantité positive et négative, signes

d'addition et de soustraction, mais ils sont encore signes de multiplication et de division; car dans le calcul des puissances $a^{5+2}$, le signe +, qui réunit les exposans, est signe de multiplication, comme — dans $a^{7-5}$ est signe de division. Mais ce qui est encore plus étonnant, le signe —, qui vient d'être signe de division dans $a^{7-5}$, devient signe de multiplication dans $\frac{1}{-a^3} = 1 \times a^3$, parce que la quantité $a^3$ précédée du signe —, devient facteur du numérateur en changeant son signe. On voit par là que les signes + et — sont susceptibles de quatre interprétations différentes, lesquels, par conséquent, sont des signes très équivoques; et comme ils entrent dans la composition des principes du calcul algébrique, il ne faut pas être surpris de la confusion qu'ils ont mise et des erreurs qu'ils ont répandues dans toutes les parties de l'algèbre et de la géométrie, comme on peut le voir dans le livre *de l'Exposition du calcul des quantités négatives.*

Les autres signes, dont on se sert en algèbre, quoique moins intéressans, trouveront ici leur place. Le signe = est un signe d'*égalité*, $a+b=c$.

Le signe $>$ signifie *plus grand*, $a > b$. Le signe $<$ signifie *plus petit*, $b < a$. Le signe $\times$ signifie *multiplié*, $a \times b$, c'est-à-dire $a$ multiplié par $b$. Le trait — signifie *divisé*, $\frac{a}{b}$, c'est-à-dire $a$ divisé par $b$. Le signe $\surd$ signifie *racine*, $\sqrt[3]{a}$ indique la racine cubique de $a$.

## ADDITION ALGÉBRIQUE.

L'ADDITION algébrique consiste à réunir par le signe $+$ des unités de même espèce, représentées par des lettres, pour en faire une somme égale à toutes.

Soit proposé d'ajouter les unités contenues dans $+a$ avec les unités contenues dans $+b$, quantités de même ordre et de même espèce algébrique, l'une et l'autre étant positives, il faudroit, suivant la définition ci-dessus, les réunir avec le signe $+$, ce qui donneroit $+a++b$ pour la somme demandée; mais parce qu'on est convenu, pour éviter les doubles signes, de supprimer dans l'addition celui de quantité, il restera $a+b$ pour l'expression de la somme demandée, et le signe restant sera signe d'opération.

Soit proposé d'ajouter $-c$ avec $-d$, deux quantités de même ordre et de même espèce algébrique, l'une et l'autre étant négatives, il faudroit, suivant la définition, les réunir par le signe + d'opération, ce qui donneroit $-c+-d$; mais comme dans l'addition des négatives on est convenu de supprimer le signe d'opération, on écrira seulement $-c-d$, et les signes restans seront signes de quantité.

Si l'on proposoit d'ajouter $+a$ avec $-b$, deux quantités de différens ordres et de différentes espèces, conséquemment hétérogènes, pour en faire une somme, on proposeroit visiblement une chose déraisonnable, parce que deux quantités qui se détruisent mutuellement, bien loin de composer une somme, ne peuvent que la détruire en tout ou en partie, comme on le voit dans les expressions suivantes, $+12-12=0$ $+12-8=+4$, somme ridicule, où les parties réunies sont égales à rien, où le tout est plus foible qu'une de ses parties. Cependant tous les livres d'algèbre sont remplis de pareils exemples d'addition, dans lesquels on propose d'ajouter $+5a$ avec $-5b$. Pareillement $+m-n-c$ avec

$+g-h+k$. On n'a jamais proposé en arithmétique, des années, des toises, des écus pour en faire une somme; pourquoi donc en algèbre proposeroit-on des unités beaucoup plus hétérogènes, pour en composer une somme? il ne faudra donc pas être surpris, si nous ne donnons point de pareils exemples d'addition. Lorsque les quantités seront semblables, on en formera des sommes particulières que l'on réunira en une somme totale.

Les quantités à ajouter sont simples ou monomes, complexes ou polynomes. Les monomes sont formées d'un seul terme tel que $a$, $ab$, $abc$. Les polynomes sont composées de plusieurs termes, comme $a+b+c$, $ab+ac+bc+bcd$. Les dimensions d'un monome littéral sont estimées par le degré des unités-puissances dont il est composé : ces dimensions, selon l'usage, se tirent du nombre des lettres qu'il contient; $a$, par exemple, est un monome d'une seule dimension, $ab$ de deux dimensions, $abc$ de trois, et ainsi des autres. D'où il suit que l'unité linéaire est la mesure du monome $a$, l'unité-puissance $1^2$ est la mesure du monome $ab$, l'unité-puissance $1^3$ celle du monome $abc$, etc.

Les quantités que l'on compare dans un même calcul, devant être homogènes, de même que les résultats de leurs opérations, elles doivent contenir un nombre égal de dimensions exprimé ou sous-entendu. Pour cet effet, si le nombre des lettres n'est pas égal dans chaque terme, on multipliera ceux qui ont moins de lettres par l'unité-puissance complémentaire requise, pour avoir un nombre de dimensions égales dans chaque terme. Supposons, par exemple, le résultat d'une opération représenté par $b^6+a^4+c^1$; si on veut donner des dimensions homogènes à chaque terme pour en composer une somme, on écrira $b^6+1^2a^4+1^5c^1$, dont chaque terme a un nombre égal de dimensions; car l'exposant de $b$ est 6, l'exposant de $a$ est $2+4=6$, celui de $c$ est $1+5=6$, tous termes homogènes, dont l'exposant étant le même, les dimensions sont égales. Si on ne vouloit point écrire les unités complémentaires qui n'apportent aucune différence de valeur dans l'évaluation du terme, il faudroit nécessairement les supposer pour l'intégrité de la théorie du calcul, sans quoi $b^6+a^4+c$ ne pourroit être conçu comme un tout homogène.

Voici des exemples d'additions de quantités polynomes dans l'un et l'autre ordre positif et négatif.

EXEMPLES.

1er.

$$\begin{array}{r} a+b+c \\ d+f+g \\ h+m+n \\ \hline a+b+c+d+f+g+h+m+n \end{array}$$

2e.

$$\begin{array}{r} -a-b-c \\ -d-f-g \\ -h-m-n \\ \hline -a-b-c-d-f-g-h-m-n \end{array}$$

3e.

$$\begin{array}{r} 2a+5b+6c+4d \\ 3a+4b+1c+3d \\ 7a+2b+3c+6d \\ \hline 12a+11b+10c+13d \end{array}$$

4e.

$$\begin{array}{r} -2a-5b-6c-4d \\ -3a-4b-1c-3d \\ -7a-2b-3c-6d \\ \hline -12a-11b-10c-13d \end{array}$$

Quoique nous ayons dit que les algébristes, pour éviter les doubles signes, étoient convenus de supprimer le signe + de quantité dans l'addition des positives, et le signe + d'opération dans l'addition des négatives, il n'y a point de nécessité de s'astreindre à de pareilles règles; on ne les a que trop observées au détriment du calcul. Nous nous ferons un mérite de les enfreindre, quand le cas l'exigera, principalement à l'occasion du double signe——.

Tous les algébristes conviennent que, pour former une somme, les quantités doivent être homogènes, de même espèce, de même ordre. Cependant on lit dans certains traités élémentaires d'algèbre, qu'*ajouter* ne signifie pas toujours augmenter; et l'on donne pour preuve de cette assertion, que si l'on fait l'addition d'une

*dette* et d'un *bien*, l'un ou l'autre diminue nécessairement. Mais si une dette ou un bien sont des quantités hétérogènes d'espèce et de nature différentes, comment faire l'addition d'un bien et d'une privation de bien, pour en composer une somme ? N'est-ce pas être en contradiction avec soi-même ? n'est-ce pas dire que les quantités requises pour former une somme, doivent être homogènes et ne pas l'être, puisqu'une dette, quantité négative, hétérogène à un bien, quantité positive, peut faire somme avec elle, quoiqu'il ne puisse y avoir d'union entre des quantités qui se détruisent mutuellement ? Il n'est donc pas surprenant qu'un mélange de pareilles quantités donne une diminution de valeur, au lieu d'augmentation que donneroit une vraie somme. Le mélange des positives et négatives, produit une différence, et une différence n'est pas somme. C'est donc un mauvais procédé, que de donner des différences et des soustractions pour exemples d'additions.

## SOUSTRACTION ALGÉBRIQUE.

La soustracton algébrique consiste à séparer par le signe — les quantités dont on veut avoir la différence, par opposition directe à l'addition, qui consiste à réunir par le signe + les quantités dont on veut avoir la somme.

La soustraction algébrique renferme trois cas, dont le premier est seul commun à l'arithmétique vulgaire qui ne connoît pas les quantités négatives.

Le premier cas est celui où les quantités étant de même espèce algébrique, on soustrait la plus petite de la plus grande. Le second cas est celui où les quantités étant de même espèce algébrique, on soustrait la plus grande de la plus petite. Le troisième cas est celui où les quantités étant de différente espèce algébrique, sont rappelées à la même, pour être susceptibles d'addition et former une somme.

De ces trois cas résultent trois espèces de soustractions ; *la soustraction rigoureuse*, *la soustraction par emprunt*, et *la différence additionnelle*. La première porte le nom de rigoureuse,

parce qu'elle est prise dans toute la rigueur du terme, qu'elle est la plus naturelle et la plus intelligible : chacun conçoit qu'il est facile de retrancher une moindre quantité d'une plus grande. La seconde s'appelle soustraction par emprunt, parce qu'il est impossible de concevoir que l'on puisse ôter une grande quantité d'une moindre sans emprunt. Cet emprunt n'est pas censé se faire sur une valeur déterminée, comme en arithmétique, mais sur la quantité générale. La troisième porte le nom de différence additionnelle, parce qu'elle se résout finalement en addition, et que la soustraction n'est qu'une opération préliminaire, laquelle rendant les quantités homogènes, les rend propres à composer une somme. De plus, l'on peut dire, strictement parlant, trouver la différence de $-7$ à $+4$, et que l'on ne peut dire, en aucun sens, ôter $+4$ de $-7$, des quantités qui s'excluent, ne pouvant être contenues l'une dans l'autre.

Pour faciliter l'intelligence des trois espèces de soustractions rapportées ci-dessus, on donnera des exemples simples en caractères numériques, auxquels on appliquera la règle ordinaire, qui

est de changer le signe de la grandeur à soustraire. On emploiera ensuite d'autres exemples auxquels on fera l'application d'une règle de soustraction plus conforme à la nature de la chose.

## EXEMPLES

*de soustractions selon la méthode ancienne.*

### SOUSTRACTION RIGOUREUSE.

De $+12$
soustraire $+4$, $+12-4=+8$, différence.

De $-12$
soustraire $-4$, $-12+4=-8$, différence.

### SOUSTRACTION PAR EMPRUNT.

De $+4$
soustraire $+12$, $+4-12=-8$, différence.

De $-4$
soustraire $-12$, $-4+12=+8$, différence.

### SOUSTRACTION ADDITIONNELLE.

*Différence.*

De $+12$
à $-4$, $+12+4=+16$, différence.

De $-12$
à $+4$, $-12-4=-16$, différence.

Cette méthode de soustraction, dans laquelle on donne pour règle de changer le signe de la grandeur à soustraire, donne un résultat vrai, mais dont la vérité ne se fait ni sentir, ni appercevoir. Elle est perdue pour le calculateur, comme dans la soustraction arithmétique, parce que la grandeur à soustraire disparoît entièrement à ses yeux, et que le signe — conserve son équivocité. On demande de soustraire $+b$ de $+a$; il est certain qu'en écrivant $+a-b$, la grandeur $+b$ est perdue pour le calculateur, et que le signe — que l'on substitue au signe +, est un signe équivoque à trois interprétations différentes. Ce qui n'arrive point en écrivant $+a-+b$, expression dans laquelle la quantité à soustraire $+b$ ne disparoît point, et fait connoître par le signe + de quantité qui la précède, qu'elle étoit homogène et de même espèce que la quantité dont elle est soustraite, et parce que dans le double signe celui qui précède est toujours signe d'opération, le signe — perd alors son équivocité. Le problême suivant contient dans son énoncé et sa résolution, les trois cas de la soustraction mentionnés ci-devant.

## PROBLÊME GÉNÉRAL.

*Trouver la différence d'une quantité à une autre quantité quelconque.*

### RÈGLE ET RÉSOLUTION.

Placez le signe — d'opération devant le signe de quantité du second terme, et réduisez.

### EXEMPLES.

*Différence rigoureuse monome.*

De $+12$ à $+4$, $+12-+4=+8$

De $-12$ à $-4$, $-12--4=-8$

De $+5ab$ à $+3ab$, $+5ab-+3ab=+2ab$

De $-5ab$ à $-3ab$, $-5ab--3ab=-2ab$

*Différence par emprunt.*

De $+4$ à $+12$, $+4-+12=-8$

De $-4$ à $-12$, $-4--12=+8$

De $+3ab$ à $+5ab$, $+3ab-+5ab=-2ab$

De $-3ab$ à $-5ab$, $-3ab--5ab=+2ab$

*Différence additionnelle.*

De $+12$ à $-4$, $+12--4=+16$

De $-12$ à $+4$, $-12-+4=-16$

De $+5ab$ à $-3ab$, $+5ab--3ab=+8ab$

De $-5ab$ à $+3ab$, $-5ab-+3ab=-8ab$

Cette manière d'opérer a l'avantage de conserver à la soustraction son caractère distinctif qui est le signe —, sans faire disparoître l'espèce de la quantité à soustraire. Dans l'expression $+12-+4$ on voit distinctement, que $+4$, quantité à soustraire, est de même espèce positive que $+12$ dont elle faisoit partie. Dans la différence additionnelle $+12---4=+16$, on voit au contraire que la quantité négative $-4$, hétérogène à $+12$, lui devient homogène à la faveur du double signe $---=+$, et par cette transformation, elle se trouve propre, étant ajoutée à $+12$, à former la somme $+12+4=+16$. Par où l'on voit que, dans la différence additionnelle, le seul changement de signe appartient à la soustraction, et que l'opération finale, qui donne la somme $+12+4=+16$, appartient à l'addition.

EXEMPLES

*pour les différences polynomes.*

De $+9a \quad +7b \quad +4c$ à $+4a+3b+2c$,

$-+4a-+3b-+2c$

$+5a \quad +4b \quad +2c$ différence.

De $-8ab$ $-9bc$ $-7fg$ à $-3ab-5bc-4fg$,
$--3ab---5bc---4fg$

$-5ab$ $-4bc$ $-3fg$ différence.

De $+7a$ $-4b$ $+5d-6h$ à $+4a-9b-3d$,
$-+4a----9b---3d$

$+3a$ $+5b$ $+8d-6h$ différence.

On a employé dans le problême général l'expression, *trouver la différence d'une quantité à une autre quantité*, au lieu de dire, *soustraire une quantité d'une autre quantité*, parce que la première convient aux trois cas de la soustraction, et que la seconde ne pourroit convenir au troisième cas désigné par différence additionnelle, par la raison que l'on peut dire, *trouver la différence de* $-12$ *à* $+4$, et l'on ne peut dire que très-improprement, *soustraire* $+4$ *de* $-12$.

La soustraction est la seule opération qui change les quantités négatives en positives, et les positives en négatives, toute autre opération étant insuffisante à produire cet effet. La multiplication, qui n'est qu'une addition abrégée et la répétition d'une même quantité, ne changera

jamais le négatif en positif, comme on l'a prétendu jusqu'à présent, en rendant positif le produit d'un multiplicande négatif, et écrivant $-12\times-4=+48$.

Quoique le signe + détruise le signe —, et le signe — le signe +, cela n'arrive que lorsque l'un et l'autre sont signes de quantité, ou l'un et l'autre signes d'opération, parce que dans cette supposition ils deviennent signes homogènes en sens contraire, par exemple, $+5a-5a=0$; mais ils ne se détruisent point dans $+-5a$, parce que le premier est signe d'opération, et le second, signe de quantité.

## MULTIPLICATION ALGÉBRIQUE.

La multiplication algébrique consiste à répéter une quantité exprimée par lettres, autant de fois qu'il y a d'unités dans une autre, sans égard à l'espèce des unités de cette dernière.

La multiplication algébrique, quand au fond, est la même que la multiplication numérique, puisqu'elle n'est qu'une multiplication numérique indiquée; elle sera donc composée, comme

elle, d'un *multiplicande*, d'un *multiplicateur* et d'un *produit*.

Le *multiplicande* est la quantité qui doit être répétée pour composer la totalité du produit. Le nombre de fois que le multiplicande doit être répété, s'appelle *multiplicateur*. La somme qui résulte de la répétition du multiplicande, s'appelle *produit*.

Le multiplicande et le multiplicateur sont les facteurs du produit, parce qu'ils concourent à le former, mais d'une manière bien différente; le multiplicande est l'élément qui compose la totalité du produit, le multiplicateur, au contraire, en est exclu et n'en fait nullement partie. C'est une quantité abstraite, laquelle indiquant positivement le nombre de fois que le multiplicande doit être répété, ne peut être négative, puisqu'elle cesseroit d'être nombre abstrait, en quoi consiste l'essence du multiplicateur.

Le produit qui est la somme du multiplicande répété, doit être de même ordre et de même espèce que lui; si le multiplicande est positif, le produit doit être positif; si négatif, négatif. Quoiqu'un produit algébrique ne soit qu'un produit

numérique indiqué, il diffère beaucoup de ce dernier composé uniquement de chiffres; au lieu que le premier est composé de signes, de coefficiens, de lettres et d'exposans, comme on le voit dans le produit $+5a^3$ qui comprend le signe $+$, le coefficient 5, la lettre $a$ et l'exposant 3. Quand ces quatre parties ne sont pas exprimées, elles sont toujours sous-entendues. La lettre $a$, par exemple, considérée comme produit, est égale à $+1a^1$, composé du signe $+$, du coefficient 1, de la lettre $a$, et de l'exposant 1.

Dans la multiplication algébrique, il faudra donc avoir égard à quatre choses : aux signes, aux coefficiens, aux lettres, et aux exposans. Les règles pour les signes seront au nombre de deux seulement.

1re. *Règle* : $+$ par $+$ donne $+$, ou plus par plus donne plus.

2e. *Règle* : $-$ par $+$ donne $-$, ou moins par plus donne moins.

Il est constant qu'il n'en faut pas davantage pour les règles des signes d'un produit quelconque; puisque n'y ayant que deux espèces de quantités algébriques, des *positives* et des *négatives*,

la première règle dirigera les produits positifs, la seconde les produits négatifs. La première est principe de l'*ordre positif*, la seconde, de l'*ordre négatif*.

Les règles pour les coefficiens numériques, seront les mêmes que celles que l'arithmétique prescrit pour la formation des produits numériques.

Les règles pour le produit des lettres, seront de les placer les unes à côté des autres, en faisant précéder les lettres multiplicateurs des lettres multiplicandes, et les séparant par un point ou un petit intervalle, pour ne pas confondre les lettres qui composent le produit de celles qui n'y entrent point. On n'aura point d'égard à l'ordre alphabétique. S'il s'agit de multiplier *cd* par *ab*; on écrira *cd.ab* ou *cd ab*, et non pas *abcd*. On jouit par là des avantages du calcul algébrique sur le calcul numérique. De plus, n'est-il pas raisonnable de distinguer dans un tout les parties homogènes qui le composent, de celles qui n'en font point partie. Dans le produit *cd.ab*, la raison ne voit que des *c* et des *d*, quoique l'œil y apperçoive des *a* et des *b* : car faisant $ab=4$,

on aura pour l'expression du produit, $cd+cd+cd+cd$, dans lequel il n'y a que $cd$ répété quatre fois. Quand on ne veut point effectuer la multiplication, on se contente de l'indiquer par le signe × ou autres équivalens. Lorsque le multiplicande et le multiplicateur sont composés de plusieurs termes, on les couvre chacun d'un trait; par exemple, pour indiquer le produit de $2a+3c+d$ par $b^2+5d$, on écrit $\overline{2a+3c+d} \times \overline{b^2+5d}$. Ou l'on renferme le multiplicande et le multiplicateur chacun entre deux parenthèses de la manière suivante $(2a+3c+d).(b^2+5d)$. Ces indices sont des expressions arbitraires; nous avons désigné les plus usitées.

Les règles pour les exposans, seront de les ajouter et en faire une somme qui déterminera le nombre des lettres qu'il faudroit accoler, pour avoir la puissance-produit des deux exposans: par exemple, pour multiplier $a^3$ par $a^2$, on écrira $a^{3+2}=a^5=aaaaa$. Dans cette opération, le signe + est signe de multiplication.

Soit proposé de multiplier $+5ab^3$ par $+3cb^4$. On commencera par les signes, en disant + par + donne + pour le produit des signes; 5 par 3

donne 15 pour le produit des chiffres coefficiens; $a$ par $c$ donne $ac$ pour le produit des lettres; $b^{3+4}$ donne $b^7$ pour le produit des exposans; la réunion de toutes ces parties donne, pour produit total, $+15acb^7$. Ce résultat est dans l'ordre positif. Mais si l'on proposoit de multiplier $-5ab^3$ par $-3cb^4$, comme il n'y a point de facteur abstrait pour en former un multiplicateur, il faudra rappeler les signes des facteurs au principe — par + de l'ordre négatif, et écrire $-5ab^3 \times +3cb^4$, et procéder au produit effectif, en disant, — par + donne —, 5 par 3 donne 15, $a$ par $c$ donne $ac$, $b^3$ par $b^4$ donne $b^7$; réunissant le tout on a $-15acb^7$, résultat négatif diamétralement opposé au positif précédent, ce qui est conforme à la raison qui dicte qu'un multiplicande négatif répété, ne peut donner qu'un produit négatif, et de même espèce que lui.

Les facteurs d'un produit peuvent être faux ou mal ordonnés. Ils sont faux, lorsqu'étant négatifs, aucun des facteurs ne peut servir de multiplicateur, et que le produit qui en résulte n'est pas de même espèce algébrique que celle du multiplicande; ils sont mal ordonnés, lors-

que l'un étant positif et l'autre négatif, le négatif fait la fonction de multiplicateur, et le positif celle de multiplicande.

*Facteurs faux.*

$-a$ multiplicande négatif.
par $-b$ multiplicateur négatif.

$+ab$ produit faux.

$-4cd$ multiplicande négatif.
par $-8f$ multiplicateur négatif.

$+32cd.f$ produit faux.

$-a^2x^2$ multiplicande négatif.
par $-b^4c^6$ multiplicateur négatif.

$+a^2x^2.b^4c^6$ produit faux.

*Facteurs vrais.*

$-a$ multiplicande négatif.
par $+b$ multiplicateur positif.

$-ab$ produit vrai.

$-4cd$ multiplicande négatif.
par $+8f$ multiplicateur positif.

$-32cd.f$ produit vrai.

$-a^2x^2$ multiplicande négatif.
par $+b^4c^6$ multiplicateur positif.

$-a^2x^2.b^4c^6$ produit vrai.

On voit par cette table que tout produit positif, qui résulte de deux facteurs négatifs, est essentiellement faux, puisque le produit est toujours d'une espèce algébrique différente de celle de son multiplicande, ce qui est contre l'essence de la multiplication.

*Facteurs mal ordonnés.*

$+5a^2c$ multiplicande.
$-abc$ multiplicateur.

$+10a^2b$ multiplicande.
$-15ac$ multiplicateur.

$+a^2cd$ multiplicande.
$-ac^3bd$ multiplicateur.

*Facteurs bien ordonnés.*

$-abc$ multiplicande.
$+5a^2c$ multiplicateur.

$-15ac$ multiplicande.
$+10a^2b$ multiplicateur.

$-ac^3bd$ multiplicande.
$+a^2cd$ multiplicateur.

Cette table fait voir que, lorsque deux facteurs, dont l'un est positif et l'autre négatif, concourent à former un produit, le négatif doit toujours occuper la place du multiplicande, un multiplicateur négatif étant une absurdité.

Nous renfermerons dans quatre problêmes, les différens cas dont la multiplication algébrique de deux facteurs binomes est susceptible. Le premier, lorsque les facteurs sont l'un et l'autre positifs; le second, lorsqu'ils sont négatifs; le troisième, lorsque le terme négatif est plus foible que le positif; le quatrième, lorsque le facteur positif est plus foible en nombre d'unités, que le facteur négatif. De la résolution de

ces quatre problêmes, on déduira facilement la méthode de se conduire dans les opérations les plus composées, qui ne sont que des répétitions et des mélanges d'opérations simples.

## PROBLÊME PREMIER.

Multiplier le facteur positif binome $+a+b$ par le facteur positif binome $+c+d$.

### RÉSOLUTION.

Après avoir placé le multiplicateur $+c+d$ sous le multiplicande $+a+b$, on multipliera le multiplicande entier par chaque lettre du multiplicateur, et la somme des produits partiels donnera le produit total demandé.

### OPÉRATION.

$+a+b$ multiplicande.
$+c+d$ multiplicateur.

$+ac+bc$
$+ad+bd$

$+ac+bc+ad+bd$ produit.

On commencera l'opération par le produit des signes, en disant, + par + donne +, $a$ par $c$ donne $ac$ ; on écrira $+ac$ pour premier terme du produit.

On multipliera de la même sorte le second terme du multiplicande par le premier terme du multiplicateur, ce qui donnera $+bc$ pour le second terme du produit qui sera placé à la suite du premier, et tout le multiplicande se trouvera multiplié par la première partie du multiplicateur. On procédera de la même façon pour le produit du multiplicande par la seconde partie $+d$ du multiplicateur, qui donnera $+ad+bd$. Ces deux termes seront placés sous les deux premiers, en commençant sous la seconde partie du premier produit partiel, et leur réduction donnera $+ac+bc+ad+bd$ pour le produit total requis. La démonstration de ce procédé est fondée sur l'égalité du tout et de ses parties réunies.

Le produit $+ac+bc+ad+bd$ que le calcul vient de donner, dans lequel l'œil apperçoit des $c$ et des $d$, est une illusion algébrique, puisque la raison n'en voit point, mais seulement des $a$ et des $b$, le multiplicateur $c+d$ ne pouvant

entrer dans le produit ni en faire partie, ses unités qui sont des unités de fois étant entièrement hétérogènes aux unités du multiplicande et du produit. Pour mettre la chose au plus haut degré d'évidence, soit $c=4$, $d=3$, on aura $c+d=7$ pour multiplicateur du produit. Ce sera donc sept fois que les lettres $a$ et $b$ du multiplicande devront être répétées pour donner la valeur totale du produit qui sera $a+a+a+a+a+a+a$, $+b+b+b+b+b+b+b$, dans lequel l'œil et la raison n'apperçoivent que des $a$ et des $b$, sans mention quelconque du multiplicateur $c+d$.

Supposons, $a=6$, $b=5$ pour multiplicande, $c=4$, $d=3$ pour le multiplicateur.

Le 1er. produit $+ac$, donnera $a+a+a+a$
$=6+6+6+6=$ . . . . . 24

Le 2e. produit $+bc$ donnera $b+b+b+b$
$=5+5+5+5=$ . . . . . 20

Le 3e. produit $+ad$ donnera $a+a+a$
$=6+6+6=$ . . . . . 18

Le 4e. produit $+bd$ donnera $b+b+b$
$=5+5+5=$ . . . . . 15

77

Le multiplicande $a+b=6+5=11$, et le multiplicateur $c+d=4+3=7$, ont dû donner pour produit 7 fois 11 ou 77, comme le résultat de l'opération l'a porté, sans mélange de $c$ ni de $d$ pour le produit littéral, ni de 4 ni de 3 pour le produit numérique; ce qui prouve combien il faut se méfier de l'œil dans les opérations du calcul algébrique, où la seule raison doit présider. Ce sont cependant ces facteurs non existans dans les équations composées, qui ne sont que des produits, que les algébristes prétendent extraire sous le nom de racines; tentatives qui ne peuvent être que vaines et infructueuses.

On ne peut donc trop insister sur la non-existence des mutiplicateurs dans les produits. On prie le lecteur de donner une attention particulière à cette importante vérité, qui réduit les multiplications les plus composées, à l'unité de racine, parce qu'elles ne sont que des produits résultans d'un seul multiplicande répété, sous le nom de racine.

## EXEMPLES

*de multiplications complexes relatives au premier cas, dans l'ordre positif.*

1er.

$2a^2 + 3ab$ multiplicande.
$3a + 2b$ multiplicateur.

$6a^3 + 9a^2b$
$+ 4a^2b + 6ab^2$

$6a^3 + 13a^2b + 6ab^2$ produit.

2e.

$a^2 + ab + b^2$ multiplicande.
$a + b$ multiplicateur.

$a^3 + a^2b + ab^2$
$+ a^2b + ab^2 + b^3$

$a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3$ produit.

3e.

$$x^2 + 2fx + f^2 + g^2$$
$$x + 2f$$

$$x^3 + 2fx^2 + f^2 x + g^2 x$$
$$+ 2x^2 f + 4f^2 x + 2f^3 + 2g^2 f$$

$$x^3 + 4fx^2 + 5f^2 x + 2f^3 + g^2 x + 2g^2 f$$

Pour avoir une idée juste de la multiplication, il faut concevoir le multiplicande, comme une quantité qui doit être répétée autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, nombre abstrait composé d'unités de fois. Ces unités de fois sont entièrement hétérogènes aux unités du multiplicande, et ne font jamais partie du produit. D'où il suit que les unités qui composent ce dernier sont toujours de l'espèce physique ou algébrique du multiplicande. Si les unités du multiplicande sont des toises, le produit donnera des toises, si des pistoles, des pistoles, si des positives, des positives, si des négatives, des négatives. La racine positive $+6$ donnant le carré $+36$, n'est-ce pas une

absurdité que la racine négative $-6$, diamétralement opposée à la première, donne le même carré positif $+36$, c'est-à-dire, des positives en place de négatives ?

## PROBLÊME II.

Les facteurs négatifs binomes $-a-b$ et $-c-d$ étant donnés, on demande d'en former le produit.

### RÉSOLUTION.

Les facteurs proposés étant l'un et l'autre négatifs, sont des facteurs faux qu'il faudra rappeler au principe de l'ordre négatif représenté par cette formule $(-a\times+b)$ pour les rendre vrais facteurs, ce qui les convertira en $-a-b$ pour le multiplicande, et $+c+d$ pour le multiplicateur, les facteurs proposés devant toujours être distingués des facteurs préparés, dont le premier étant négatif, rend le second nécessairement positif. Cette préparation des facteurs étant faite, on procédera à la multiplication.

OPÉRATION.

| | |
|---|---|
| $-a-b$ | multiplicande négatif. |
| $+c+d$ | multiplicateur positif. |
| $-ac-bc$ | |
| $-ad-bd$ | |
| $-ac-bc-ad-bd$ | produit négatif. |

Après avoir placé le multiplicateur $+c+d$ sous le multiplicande $-a-b$, on dira, — par + donne —, $a$ par $c$ donne $ac$; on posera $-ac$ pour premier terme du produit. On multipliera le second terme du multiplicande par le premier terme du multiplicateur, en disant, — par +, donne —, $b$ par $c$ donne $bc$; on posera $-bc$ à la suite de $-ac$, et tout le multiplicande sera multiplié par le premier terme du multiplicateur. Il reste à multiplier le multiplicande par $+d$, second terme du multiplicateur; en opérant, comme on a fait pour les deux premiers termes du produit, on trouvera $-ad-bd$, que l'on placera sous les deux premiers termes, en commençant sous la seconde partie du premier pro-

duit partiel, et le produit total $-ac-bc-ad-bd$ du même ordre négatif que le multiplicande, sera le vrai produit demandé.

En multipliant selon les règles usitées, on auroit eu un produit positif diamétralement opposé à l'espèce de son multiplicande, c'est-à-dire un produit faux. Ceux qui disent que les multiplicateurs négatifs indiquent non seulement le nombre de fois qu'il faut répéter le multiplicande, mais encore la manière dont il doit être répété, disent une chose bien peu réfléchie; puisque, si l'on faisoit attention à autre chose qu'au nombre des unités du multiplicateur, il cesseroit d'être un nombre abstrait, en quoi consiste son essence. Quand on multiplie des toises par des écus, l'espèce des écus n'entre pour rien dans le produit uniquement composé de toises. Il n'y a donc et ne peut pas plus y avoir de multiplicateur négatif que de multiplicateurs écus, multiplicateurs chevaux, multiplicateurs brebis. Ajoutons que s'il falloit répéter le multiplicande dans le sens d'un multiplicateur négatif, il faudroit le répéter moins trois fois, moins quatre fois, etc. ce qui est ridicule.

Les algébristes comparent ordinairement les quantités négatives à des dettes. En admettant cette supposition : Soient deux personnes, dont l'une ait 10 louis de bien, et la seconde 10 louis de dette. La première ajoute chaque année 10 louis à son capital; la seconde, au contraire, fait chaque année une dette de 10 louis. Au bout de dix ans la première faisant la somme de son bien, trouve 10, +10, +10, +10, etc. =+100 louis. La seconde, au bout du même temps, fait la somme de ses dettes, et trouve —10, —10, —10, —10, etc. =—100 louis. Croyant s'être trompée, elle se rappelle que — par — donne +. En conséquence elle fait le carré de sa dette, en multipliant —10 par —10; et trouvant pour résultat +100, elle croit sa position égale à celle du possesseur de 100 louis. Tel est le ridicule occasionné par les multiplicateurs négatifs.

*Facteurs polynomes faux.*

1er.

$$\begin{array}{rl} & -a-b \quad \text{multiplicande négatif.} \\ \text{par} & -d-g \quad \text{multiplicateur négatif.} \\ \hline & +ad+bd \\ & \quad +ag+bg \\ \hline & +ad+bd+ag+bg \quad \text{produit faux.} \end{array}$$

2e.

$$\begin{array}{rl} & -5b-4d \quad \text{multiplicande négatif.} \\ \text{par} & -4a-3c \quad \text{multiplicateur négatif.} \\ \hline & +20ba+16da \\ & \quad +15bc+12dc \\ \hline & +20ba+16da+15bc+12dc \text{ prod. faux.} \end{array}$$

3e.

$$\begin{array}{rl} & -7-3 \quad \text{multiplicande négatif.} \\ \text{par} & -4-2 \quad \text{multiplicateur négatif.} \\ \hline & +28+12 \\ & \quad +14+6 \\ \hline & +28+26+6 \quad \text{produit faux.} \end{array}$$

*Facteurs polynomes vrais.*

1er.

$-a-b$ multiplicande négatif.
par $+d+g$ multiplicateur positif.

$-ad-bd$
$-ag-bg$

$-ad-bd-ag-bg$ produit vrai.

2e.

$-5b-4d$ multiplicande négatif.
par $+4a+3c$ multiplicateur positif.

$-20ba-16da$
$-15bc-12dc$

$-20ab-16da-15bc-12dc$ prod. vrai.

3e.

$-7-3$ multiplicande négatif.
par $+4+2$ multiplicateur positif.

$-28-12$
$-14-6$

$-28-26-6$ produit vrai.

On voit par cette table que deux quantités négatives ne peuvent jamais concourir à former un véritable produit. Multiplier $+4$ par $+3$, c'est écrire $+4+4+4$. Multiplier $-4$ par $+3$, c'est écrire $-4-4-4$. Mais quelle idée peut-on faire correspondre à cette proposition, multiplier $-4$ par $-3$, si ce n'est celle de la soustraction, opération diamétralement opposée à celle dont il est question? Multiplier et soustraire sont deux idées insociables et incompatibles. Multiplier, c'est augmenter en nombre d'unités; soustraire, c'est diminuer en nombre d'unités, ce qui signifieroit augmenter en diminuant, avancer en reculant. Disons donc qu'un multiplicateur négatif est un vice de principe.

Les multiplicateurs des exemples ci-après, relatifs au second problême, seront considérés comme des facteurs négatifs proposés, que l'on a transformés en facteurs positifs. Ainsi, on supposera, dans le premier exemple, que le facteur $-a-b$ a été converti en $+a+b$, pour faire les fonctions de multiplicateur.

On fera la même supposition pour les autres exemples.

## EXEMPLES

*de multiplications complexes relatives au second cas, dans l'ordre négatif.*

1er.

$$\begin{array}{ll} -c-d & \text{multiplicande.} \\ +a+b & \text{multiplicateur.} \\ \hline -ca-da & \\ \quad -cb-db & \\ \hline -ca-da-cb-db & \text{produit.} \end{array}$$

2e.

$$\begin{array}{ll} -7b-5d & \text{multiplicande.} \\ +3a+5f & \text{multiplicateur.} \\ \hline -21ba-15da & \\ \quad -35bf-25df & \\ \hline -21ba-15da-35bf-25df & \text{produit.} \end{array}$$

3e.

$-a^2-ab-c^2$ multiplicande.
$+d+g$ multiplicateur.

$-a^2d-abd-c^2d$
$-a^2g-abg-c^2g$

$-a^2d-abd-c^2d-a^2g-abg-c^2g$ prod.

4e.

$-10-15$ multiplicande.
$+7+9$ multiplicateur.

$-70-105$
$-90-135$

$-70-195-135$ prod.

## PROBLÈME III.

On demande le produit de la différence rigoureuse $+a-b$, par la différence rigoureuse $+c-d$.

### RÉSOLUTION.

Les facteurs proposés étant l'un et l'autre

positifs, parce que $a > b$ et $c > d$, n'exigent aucune préparation; mais dans le cours de l'opération, on fera attention aux excès de soustraction à réparer, en plaçant le signe — d'opération avant le signe de quantité du produit particulier à soustraire.

OPÉRATION.

| | |
|---|---|
| $+ a - b$ | multiplicande positif. |
| $+ c - d$ | multiplicateur positif. |
| $+ ac - bc$ | |
| $- + ad - - bd$ | |
| $+ ac - bc - + ad - - bd$ | produit positif. |

Après avoir placé le multiplicateur sous le multiplicande, on dira, + par + donne +, $a$ par $c$ donne $ac$; on écrira $+ac$ pour premier terme du produit : on multipliera ensuite le second terme du multiplicande par le premier terme du multiplicateur, en disant, — par + donne —, $b$ par $c$ donne $bc$; on posera $-bc$ à la suite du premier terme $+ac$ du produit, et le multiplicande entier se trouvera multiplié par le premier terme du multiplicateur. Il reste

à multiplier tout le multiplicande par le second terme du multiplicateur; et parce que ce second terme est négatif, et qu'il n'y a point de multiplicateur négatif, on séparera le signe de la lettre, comme si elle étoit écrite $--+d$, on multipliera tout le multiplicande par $+d$, en disant, $+a$ par $+d$ donne $+ad$, que l'on écrira au produit, en faisant précéder le signe + du signe —, que l'on a détaché de la lettre $d$, ce qui donnera $- +ad$ pour troisième terme du produit. On procédera ensuite au produit de $-b$ par $+d$, en disant, — par + donne —, $b$ par $d$ donne $bd$; on écrira $-bd$, que l'on fera précéder du signe — en cette sorte, $--bd$, et ce sera le dernier terme du produit. Ainsi le produit total demandé sera $+ac-bc-+ad--bd$.

On trouve le même exemple dans la troisième partie du cours de mathématique de M. Bézout, à l'usage de la marine, pag. 18. L'auteur dit : « Qu'on multipliera d'abord $a-b$ par $c$, ce qui « donnera $ac-bc$; on multipliera ensuite $a-b$ « par $d$, ce qui donnera $ad-bd$; enfin on re- « tranchera ce second produit $ad-bd$ du pre- « mier, et on aura $ac-bc-ad+bd$ pour

« produit total. » Mais comment reconnoître dans $+bd$ la soustraction du produit $-bd$? N'est-il pas plus naturel de penser que $bd$ a été ajouté au premier produit $ac-bc$, que de penser qu'il en a été retranché?

Cet inconvénient ne se trouve point dans l'expression $ac-bc-+ad--bd$ que nous avons donnée du produit total. On voit distinctement le produit $+ad-bd$ du multiplicande $+a-b$ par $d$ seconde partie du multiplicateur, et la soustraction qui en a été faite par la position du signe — d'opération avant le signe de quantité des deux derniers termes en cette sorte, $-+ab--bd$. En cela tout est visiblement conforme aux règles prescrites par l'auteur, et la marche de l'opération est conservée aux yeux du calculateur, au lieu qu'elle est perdue pour lui dans $-ad+bd$, qui lui offre une addition de quantité positive, au lieu de la soustraction d'une quantité négative. On ne reproche rien à la validité du produit, mais seulement à l'expression du dernier terme, qui a trompé tous les algébristes qui l'ont fait servir à la démonstration de ce faux principe, — *par*

— *donne* +, sans faire attention que la vraie expression — — *bd* étoit de même valeur que + *bd*. La première expression désigne un excès de soustraction réparée, et la seconde indique une quantité positive, dont les idées sont totalement différentes.

EXEMPLES

*de multiplications complexes relatives au troisième cas, dans l'ordre positif.*

1er.

| | |
|---|---|
| + 10 — 4 | multiplicande positif. |
| + 7 — 3 | multiplicateur positif |
| + 70 — 28 | |
| — 30 — — 12 | |
| + 24 | produit positif. |

2e.

| | |
|---|---|
| + 20 — 6 | multiplicande positif. |
| + 8 — 5 | multiplicateur positif. |
| + 160 — 48 | |
| — 100 — — 30 | |
| + 42 | produit positif. |

3e.

| | | |
|---|---|---|
| + 12 | — 8 | multiplicande positif. |
| + 9 | — 2 | multiplicateur positif. |
| + 108 | — 72 | |
| | — 24 — — 16 | |
| | + 28 | produit positif. |

4e.

| | | |
|---|---|---|
| + 15 | — 5 | multiplicande positif. |
| + 8 | — 3 | multiplicateur positif. |
| + 120 | — 40 | |
| | — 45 — — 15 | |
| | + 50 | produit positif. |

Les facteurs réduits du premier exemple, sont 6 et 4, dont le produit est 24, ce qui est conforme à la somme des produits partiels. Les facteurs réduits du second exemple, sont 14 et 3, dont le produit est 42, valeur résultante

des produits partiels. Les facteurs du troisième, sont 4 et 7, et les produits partiels +28. Les facteurs du quatrième, sont 10 et 5, et les produits partiels +50, ce qui est conforme à la vérité.

## PROBLÊME IV.

On demande le produit de la différence par emprunt $+b-a$, par la différence par emprunt $+d-c$.

### RÉSOLUTION.

Les facteurs étant des différences par emprunt, on a $b < a$ et $d < c$, ce qui rend l'un et l'autre facteur négatifs et par là insuffisans à donner un produit vrai. Il faudra donc, en ce cas, avoir recours au principe de l'ordre négatif, et se conformer à la formule $(-a \times +b)$ en changeant les signes du second facteur, qui deviendra $+c-d$, multiplicateur positif.

OPÉRATION.

$+b-a$ multiplicande négatif.
$+c-d$ multiplicateur positif.

$+bc-ac$
$-+bd--ad$

$+bc-ac-+bd--ad$ produit négatif.

Après avoir placé le multiplicateur sous le multiplicande, on multipliera ce dernier par $+c$, ce qui donnera $+bc-ac$ pour les deux premiers termes du produit. On multipliera pareillement le multiplicande par $+d$, ce qui donnera $+bd-ad$; on soustraira ce dernier produit du premier, en plaçant le signe — d'opération devant le signe de quantité de chaque terme, et l'on aura pour produit total, $+bc-ac-+bd--ad$, dans lequel on apperçoit distinctement la soustraction du produit $-ad$, à la faveur du double signe $--ad$, ce que l'on n'auroit pu faire si l'on eût écrit $+ad$.

*Opérations fausses.*

$+4-9$ multiplicande négatif.
$+2-7$ multiplicateur négatif.

$+8-18$
$-28+63$

$+25$ produit faux.

2e.

$+3-8$ multiplicande négatif.
$+5-7$ multiplicateur négatif.

$+15-40$
$-21+56$

$+10$ produit faux.

3e.

$+8-12$ multiplicande négatif.
$+6-10$ multiplicateur négatif.

$+48-72$
$-80+120$

$+16$ produit faux.

*Opérations vraies.*

| | |
|---|---|
| + 4 — 9 | multiplicande négatif. |
| + 7 — 2 | multiplicateur positif. |

+ 28 — 63
— 8 — — 18

— 25 produit vrai.

2e.

| | |
|---|---|
| + 3 — 8 | multiplicande négatif. |
| + 7 — 5 | multiplicateur positif. |

+ 21 — 56
— 15 — — 40

— 10 produit vrai.

3e.

| | |
|---|---|
| + 8 — 12 | multiplicande négatif. |
| + 10 — 6 | multiplicateur positif. |

+ 80 — 120
— 48 — — 72

— 16 produit vrai.

La première colonne renferme trois exemples de multiplication à multiplicateur négatif, dont les produits sont essentiellement faux, l'espèce de leurs unités étant diamétralement opposée à l'espèce des unités de leurs multiplicandes. La seconde colonne renferme les mêmes exemples corrigés, les multiplicateurs sont positifs, et les produits, de même espèce algébrique que leurs multiplicandes, comme l'exige la vérité du calcul.

Les quatre problêmes précédens, et leur résolution, peuvent servir de règles pour tous les cas de la multiplication, avec les facteurs les plus composés.

Du premier problême, on déduira que lorsque les facteurs d'une multiplication algébrique sont tous positifs, en quelque nombre qu'ils soient, il suffit de multiplier tout le multiplicande par chaque terme du multiplicateur, et faire la somme de tous les produits partiels, ce qui donnera le produit requis dans l'ordre positif.

Du second problême, on déduira que, lorsque le multiplicande et le multiplicateur proposés seront dans l'ordre négatif, on changera tous les

signes du multiplicateur pour le rendre positif, et chaque terme de ce dernier, multipliant le multiplicande en entier, donnera autant de produits partiels, dont la somme formera le produit total requis dans l'ordre négatif.

Du troisième problême, on déduira que, lorsque les facteurs seront des différences rigoureuses, composées d'unités positives et négatives, mais dont le nombre des positives surpasse celui des négatives, le multiplicande et le produit étant nécessairement dans l'ordre positif, il n'y aura aucun changement à faire dans les facteurs proposés, qui rendront un produit positif.

Du quatrième problême, on déduira que, lorsque les facteurs seront des différences par emprunt, composées d'unités négatives et positives, mais dont le nombre des négatives surpasse celui des positives, le multiplicande et le multiplicateur étant nécessairement dans l'ordre négatif, il faudra changer les signes du second facteur pour avoir un multiplicateur positif, lequel, multipliant tous les termes du multiplicande négatif, donnera un produit négatif du même ordre que le multiplicande.

La règle générale pour tous les cas, sera de rendre le multiplicateur positif, et le produit toujours de même espèce algébrique que le multiplicande.

Des principes tant généraux que particuliers posés ci-dessus, on en extraira les corollaires suivans, qui seront autant de vérités secondaires pour servir tant à la théorie qu'à la pratique du calcul algébrique.

### COROLLAIRES GÉNÉRAUX.

1. Tout multiplicateur, nombre abstrait, affirmatif, est essentiellement de l'ordre positif.

2. Un produit quelconque, soit positif, soit négatif, est entièrement composé de son multiplicande répété le nombre de fois indiqué par son multiplicateur.

3. Aucun multiplicateur uniquement composé d'unités de fois, ne peut faire partie du produit et en être une racine.

4. Un produit quelconque résulte nécessairement de + par + ou de — par +.

5. Les carrés positifs résultent de + par +, et les carrés négatifs de — par +.

6. Tout produit a toujours le même signe de quantité que celui de son multiplicande.

7. Pour faire le produit de deux facteurs négatifs monomes, il faut donner à l'un des deux le signe +, et le produit aura le signe —.

8. Toute puissance paire ou impaire d'une quantité négative, est toujours négative.

9. Un produit quelconque, soit algébrique, soit numérique, renferme toujours deux rapports géométriques exprimés ou sous-entendus, dont le premier est composé d'unités abstraites de fois à fois, et le second d'unités concrètes ou censées telles, comme d'écus à écus, de toises à toises. La formule suivante exprime ces deux rapports dans l'un et l'autre ordre,

$$1^{\text{fois}} : +b^{\text{fois}} :: \begin{cases} +a : +ab \\ -a : -ab \end{cases}$$

Pour constater la nécessité de distinguer dans la multiplication l'espèce des produisans, nous extrairons un exemple du cours de Bézout, à l'usage de la marine, partie 3e, page 18, dans lequel, faute de cette distinction, le produit induit en erreur. L'auteur propose de multiplier $a - b$ par $c - d$. Le produit qu'il obtient est $ac - bc - ad$

$+bd$. Or ce produit est nécessairement faux dans la supposition de $a < b$ et $c < d$, lequel, dans ce cas, est $ad - bd - ac - - bc$, l'opposé du précédent.

Pour le prouver : Soit $a = 2$, $b = 5$, $c = 3$, $d = 7$. Les produisans numériques, qui correspondent aux produisans $a - b$ par $c - d$, sont $2 - 5$ par $3 - 7$, dont le produit est $6 - 15 - 14 + 35 = +12$, produit positif faux, diamétralement opposé à l'espèce algébrique de son multiplicande $2 - 5 = -3$, qui est négatif. L'erreur, en pareil cas, procède du multiplicateur négatif $3 - 7$, qu'il suffit de rendre positif en écrivant $7 - 3$, pour obtenir le produit vrai $14 - 35 - 6 - - 15 = -12$. D'où il suit que le produit $ac - bc - ad + bd$, que M. Bézout a obtenu, n'est vrai que dans la supposition de $a > b$ et $c > d$, et qu'il et faux dans la supposition de $a < b$ et $c < d$. On voit par là la nécessité indispensable de distinguer l'espèce algébrique des produisans.

## DIVISION ALGÉBRIQUE.

La division algébrique consiste à soustraire d'un produit donné sous le nom de dividende, le multiplicande donné sous le nom de diviseur, autant de fois qu'il a été ajouté, pour en obtenir le multiplicateur sous le nom de quotient.

On voit par cette définition, que la division est une opération inverse de la multiplication. En effet, dans la multiplication, le multiplicande est la quantité qui doit être répétée ; dans la division, c'est le même multiplicande, sous le nom de diviseur, qui doit être soustrait. Dans la multiplication, le multiplicateur indique le nombre de fois que le multiplicande doit être ajouté ; dans la division, le quotient exprime le même nombre de fois que le multiplicande doit être retranché. Dans la multiplication, le produit est la somme qu'il s'agit de former ; dans la division, c'est la même somme qu'il s'agit de décomposer.

D'où il suit que le dividende et le produit, le diviseur et le multiplicande, le multiplicateur et le quotient sont les mêmes quantités sous diffé-

différentes dénominations; et parce que le multiplicande et le produit sont toujours de même ordre et de même espèce dans la multiplication, le dividende et le diviseur qui leur répondent dans la division, doivent également être de même ordre et de même espèce. En conséquence on ne pourra pas dire dans $-6$ combien de fois $+2$, puisque $-6$ et $+2$ ne sont ni de même ordre, ni de même espèce algébrique. Pareillement il ne faudra pas écrire $\frac{-6}{+2}$, mais $-+\frac{6}{2}$, parce que le signe — est un signe d'opération, et le signe + signe de quantités qui désigne le quotient positif $\frac{6}{2}$. Ainsi le signe — qui précède le quotient $\frac{6}{2}$ ou $+\frac{6}{2}$ est hors du quotient, et n'en fait nullement partie.

Le problême de la division consistera donc à dire : Un produit étant donné sous le nom de dividende, et le multiplicande sous le nom de diviseur, trouver combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende.

Il est constant qu'il y sera contenu autant de fois qu'il y a été mis, et que le quotient, qui ex-

primera le nombre de fois qu'on peut l'en soustraire, sera un nombre égal, et de même espèce que le multiplicateur, qui a exprimé combien de fois il a été ajouté. Le quotient sera donc un nombre abstrait, affirmatif et positif, hétérogène au dividende et au diviseur, comme le multiplicateur l'étoit au multiplicande et au produit.

Pour la résolution du problême, il faudra avoir égard à quatre choses, comme dans la multiplication algébrique : 1°. aux signes; 2°. aux coefficiens; 3°. aux lettres; 4°. aux exposans. Les règles pour les signes sont les suivantes.

*Règle première.* + dans + donne +, ou plus dans plus donne plus.

*Règle seconde.* — dans — donne +, ou moins dans moins donne plus.

Ces deux règles suffisent au calcul des signes de la division algébrique, parce qu'il est impossible de dire — dans +, ou + dans —, sans choquer l'oreille et la raison; deux quantités, dont la principale propriété est de se détruire, ne peuvent être contenues l'une dans l'autre. On peut dire que — 4 est contenu dans — 12, comme + 4 est contenu dans + 12, c'est-à-dire 3 fois;

mais il seroit ridicule de dire, que $-4$ est contenu dans $+12$ moins 3 fois : c'est cependant ce que signifie un quotient négatif. Le signe $-$ qui précède un quotient, est un signe d'opération hors du quotient, qui n'en fait jamais partie.

Les règles pour les coefficiens seront les mêmes que l'arithmétique prescrit pour la division des quantités numériques.

Les règles pour les lettres consisteront à supprimer dans le dividende les lettres communes au diviseur; les lettres restantes exprimeront le quotient. S'il n'y a point de lettre commune, le dividende, séparé par un trait du diviseur, indiquera le quotient.

Les règles pour les exposans seront de soustraire l'exposant de la lettre diviseur, de l'exposant de la lettre dividende, si l'exposant de la lettre diviseur est plus foible. Mais si l'exposant de la lettre diviseur se trouvoit plus fort que l'exposant de la lettre dividende, il ne faudroit pas écrire $+a^{-3}$, qui donneroit un exposant négatif, multiplicateur faux; mais il faudroit écrire $-a^3$, expression opposée à $+a^3$. En effet, si $a^{8-5}=+a^3$, on doit avoir $a^{5-8}=-a^3$, expression opposée à $+a^3$.

Ces règles établies : Soit proposé de diviser le produit dividende monome $+15a^3cb^7$ par le multiplicande diviseur $+5acb^3$ ; après avoir placé le diviseur sous le dividende en cette sorte, $\frac{+15a^3cb^7}{+5acb^3}\Big\{+3a^2b^4$, on dira, + dans + donne + ; on posera + au quotient à droite du crochet, ensuite 15 divisé par 5 donne 3, que l'on placera après le signe + ; $a^3$ divisé par $a$ donne $a^2$, parce que la lettre $a$, commune au dividende et au diviseur, étant supprimée, il reste $a^2$. La lettre $c$ qui succède, étant commune au dividende et au diviseur, sera supprimée ; finalement $b^3$, quantité commune au dividende et au diviseur, étant retranché de part et d'autre, il restera $b^4$ au quotient. Toutes ces quantités réunies donneront $+3a^2b^4$ pour le quotient total du monome $+15a^3cb^7$ divisé par $+5acb^3$. Pour faire la preuve, on multipliera le diviseur par le quotient, dont le produit $+15a^3cb^7$ étant égal au dividende proposé, confirme la validité des règles et de l'opération.

Si le dividende et le diviseur eussent été négatifs, le quotient eût été le même, puisqu'on

eût dit, — dans — donne +; il n'y auroit eu rien à changer dans le reste de l'opération. Ce qui prouve que le quotient est un nombre abstrait, positif, invariable, qui ne peut jamais passer de son ordre à l'ordre négatif.

Il faut observer qu'un multiplicateur quelconque ne peut jamais faire les fonctions de diviseur, fonctions qui appartiennent exclusivement au multiplicande. Si l'on dit que le produit 12, provenant de 4 multiplié par 3, peut également être divisé par le multiplicande 4 ou par le multiplicateur 3, on reviendra facilement de son erreur, si on fait attention que, lorsqu'on divise 12 par 3, c'est le produit $3\times 4=3+3+3+3$, et que lorsqu'on divise 12 par 4, c'est le produit $4\times 3=4+4+4$. Or, dans l'un et l'autre cas, c'est le multiplicande qui fait seul la fonction de diviseur, ce qui est conforme à la nature de la chose, puisque le multiplicateur ne faisant jamais partie du produit, il seroit impossible de l'en extraire, pour savoir combien de fois il y est contenu. Mais il n'en est pas de même du multiplicande, lequel occupant la totalité du produit, le nombre de fois qu'il en peut être

soustrait se trouve déterminé par les unités abstraites du quotient.

Nous renfermerons dans quatre problêmes les différens cas de la division, comme nous avons fait pour la multiplication, en prenant pour dividende les produits qui sont provenus des quatre espèces de facteurs binomes, et ont formé les quatre cas de la multiplication.

## PROBLÊME PREMIER.

Diviser le produit positif $+ ac + bc + ad + bd$ par le multiplicande diviseur $+ a + b$.

### RÉSOLUTION.

Le dividende positif proposé résulte du multiplicande $+a+b$ répété $+c+d$ fois. C'est ce nombre de fois que le quotient doit donner pour résoudre le problême.

### OPÉRATION.

$$\begin{array}{l|l} \text{Divid.} +ac\ +bc\ +ad\ +bd & +a+b \text{ divis.} \\ \hline -+ac-+bc-+ad-+bd & +c+d \text{ quot.} \end{array}$$

Après avoir écrit le dividende, et placé le di-

viseur à droite, comme on le voit dans l'opération figurée ci-dessus, on dira, $+ac$ divisé par $+a$, donne $c$, que l'on placera au quotient sous le diviseur. On multipliera le diviseur $+a+b$ par $+c$; on placera les termes du produit sous les termes correspondans du dividende, dont on fera la soustraction en plaçant le signe — d'opération devant le signe de quantité de chaque terme du produit, après quoi on en fera la réduction avec les termes correspondans du dividende, en disant, $+ac-+ac=0$, $+bc-+bc=0$; on placera o sous chaque terme réduit, et la première opération finira là. Il restera $+ad+bd$ à diviser par le même diviseur. On dira, $+ad$ divisé par $+a$, donne $+d$; on posera $+d$ au quotient à la suite de $+c$; on multipliera le diviseur $a+b$ par $+d$; les termes du produit se placeront sous les termes correspondans du dividende, après avoir fait précéder le signe de quantité de chaque terme du signe — d'opération pour en faire la soustraction, ensuite la réduction comme dans la première opération; et comme il ne reste que o, on en conclut que le diviseur $+a+b$ est contenu exactement $+c$

$+d$ fois dans le dividende. On peut vérifier l'opération en faisant le produit du diviseur $+a+b$ par le quotient $+c+d$, qui sera égal au dividende proposé, qui n'est autre chose que le produit du multiplicande $+a+b$ par le multiplicateur $+c+d$.

EXEMPLES

*de divisions complexes relatives au premier cas, dans l'ordre positif.*

1er.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Divid. | +20 | +8 | +15 | +6 | +5+2 | diviseur. |
| | −+20 | −+8 | −+15 | −+6 | +4+3 | quotient. |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | | |

2e.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Divid. | +35 | +10 | +28 | +8 | +7+2 | divis. |
| | −+35 | −+10 | −+28 | −+8 | +5+4 | quot. |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | | |

Le dividende et le diviseur étant arrangés,

comme on le voit dans le premier exemple, on dira, + 20 divisé par + 5 donne + 4, que l'on placera au quotient. On multipliera le diviseur + 5 + 2 par + 4, et le produit + 20 + 8 qui en résulte, sera placé sous les termes correspondans du dividende, dont on fera précéder chaque terme du produit du signe — pour en faire la soustraction, et ensuite la réduction avec les termes correspondans du dividende, en disant, + 20 — + 20 = 0, + 8 — + 8 = 0; on placera 0 sous chaque terme réduit, et la moitié du dividende + 20 + 8 se trouve divisée par le diviseur + 5 + 2. Il reste encore à diviser + 15 + 6 par le même diviseur. On dira donc, + 15 divisé par + 5 donne + 3, que l'on placera au quotient après le chiffre + 4. On multipliera le diviseur par + 3, et les termes du produit qui en résultent seront placés sous les termes correspondans du dividende, après avoir fait précéder les signes de quantité du signe — d'opération pour en faire la réduction; et comme il ne reste que 0, il s'ensuit que le diviseur 5 + 2 = 7 se trouve exactement 4 + 3, ou 7 fois dans le produit 20 + 8 + 15 + 6 = 49. On pro-

cédera de la même façon pour trouver le quotient du second exemple.

## PROBLÊME II.

Diviser le produit dividende négatif $-ac-bc-ad-bd$ par le diviseur multiplicande négatif $-a-b$.

### RÉSOLUTION.

Le dividende donné est un produit négatif résultant de deux facteurs négatifs proposés, dont les signes du dernier ont été changés pour en former un multiplicateur positif. C'est ce multiplicateur positif que la division doit rendre sous le nom de quotient.

### OPÉRATION.

$$\begin{array}{l} \text{Divid.} -ac \quad -bc \quad -ad \quad -bd \\ \quad\quad --ac --bc --ad --bd \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -a-b \text{ divis.} \\ \hline +c+d \text{ quot.} \end{array} \right.$$

o o o o

Après avoir placé à l'ordinaire le dividende et le diviseur, on commencera l'opération en di-

sant, — dans — donne +, ensuite $ac$ divisé par $a$ donne $c$; on écrira au quotient $+c$. On multipliera tout le diviseur par $+c$, ce qui donnera $-ac-bc$. Ces termes du produit seront placés sous les termes correspondans du dividende, en les faisant précéder du signe — d'opération, pour en faire la soustraction et ensuite la réduction avec les termes du dividende, et parce que $-ac--ac=0$, $-bc--bc=0$, on placera 0 sous chaque terme réduit; cela fait, il restera $-ad-bd$ à diviser. On dira, $-ad$ divisé par $-a$ donne $+d$, que l'on placera au quotient après le terme $+c$. On fera le produit du diviseur par $+d$, qui donnera $-ad-bd$, dont les termes seront placés sous les termes correspondans, en les faisant précéder du signe — d'opération pour en faire la soustraction, et ensuite la réduction, comme dans les opérations précédentes, laquelle se réduisant à 0, indique que le diviseur $-a-b$ est contenu exactement $+c+d$ fois dans le dividende proposé. Pour faire preuve et s'en convaincre, il suffit de multiplier le diviseur par le quotient, dont le produit rendra le dividende.

## EXEMPLES

*de divisions complexes dans l'ordre négatif, relatives au second problême.*

1er.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Divid. | −54 | −18 | −36 | −12 | −9 −3 divis. |
| | −−54 | −−18 | −−36 | −−12 | +6 +4 quot. |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | |

2e.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Divid. | −24 | −21 | −32 | −28 | −8 −7 divis. |
| | −−24 | −−21 | −−32 | −−28 | +3 +4 quot. |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | |

A la vue des deux divisions numériques ci-dessus figurées, il est facile d'appercevoir le procédé qu'il faut suivre pour opérer, lequel est le même que pour la division algébrique du second problême.

## PROBLÊME III.

Diviser le produit $+ac - bc - + ad - - bd$ provenant de deux différences rigoureuses, par la différence rigoureuse $+a - b$.

### RÉSOLUTION.

Ce problême diffère des deux précédens, en ce que les dividendes proposés étoient des sommes composées d'unités toutes homogènes. Le premier, d'unités toutes positives; le second, d'unités toutes négatives. Dans ce troisième problême le dividende n'est pas une somme, mais une différence dont les unités qui la composent sont, en partie positives, en partie négatives, et dont le nombre des positives surpassant celui des négatives, rend le dividende et le diviseur positifs.

### OPÉRATION.

$$\begin{array}{l|l} \text{Divid. } +ac\ -bc-+ad--bd & +a-b \text{ divis.} \\ \hline -+ac--bc\ +ad\ -bd & +c-d \text{ quot.} \\ \hline \end{array}$$

o o o o

Après avoir écrit et placé le dividende et le diviseur, comme dans le problême précédent, on dira, $+ac$ divisé par $+a$ donne $+c$, que l'on posera au quotient. On multipliera le diviseur par $+c$, et les termes $+ac - bc$ qui en résulteront, seront placés sous les termes correspondans du dividende, après avoir fait précéder du signe — le signe de quantité de chaque terme pour en faire la soustraction, et ensuite la réduction; cela fait, il restera à diviser $-+ad - -bd$ par le diviseur $+a - b$; pour cet effet on ne dira pas dans $-+ad$ ou dans $-ad$ combien de fois $+a$, puisque le négatif ne peut contenir le positif; mais on dira, $+ad$ divisé par $+a$ donne $+d$ pour quotient positif; et parce qu'il faut faire la soustraction de ce quotient positif, indiquée par le signe — d'opération qui précède le signe de quantité, on mettra $-d$ au quotient, qui aura la même signification que $-+d$.

Après avoir placé $-d$ au quotient, on multipliera tout le diviseur par $d$ positif, et non par $-d$ multiplicateur négatif; ce qui donnera $+ad - bd$, que l'on placera sous les termes

correspondans du dividende, sans faire précéder les signes de quantité du signe — d'opération pour en faire la soustraction, qui s'est faite, lorsqu'au lieu de dire, — $ad$ divisé par $a$, on a dit, $+ad$ divisé par $+a$, car tout changement de signe est une véritable soustraction; c'est pourquoi, après avoir placé les termes du produit sous les termes correspondans du dividende, on en fera immédiatement la réduction, en disant, $- + ad + ad = 0$, $- - bd - bd = 0$. Comme il ne reste aucun terme à diviser, l'opération est finie.

EXEMPLES

*de divisions complexes relatives au troisième problème, dans l'ordre positif.*

1er.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Divid. $+48$ | $-30$ | $-+16$ | $--10$ | $\left\{\begin{matrix}+8\\+6\end{matrix}\right.$ | $\left\{\begin{matrix}-5\text{ divis.}\\-2\text{ quot.}\end{matrix}\right.$ | |
| $-+48$ | $--30$ | $+16$ | $-10$ | | | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | | | |

On dira, $+48$ divisé par $+8$ donne $+6$; on posera $+6$ au quotient. On multipliera le di-

viseur par $+6$; les termes $+48-30$ qui en résultent seront placés sous les termes correspondans du dividende, après les avoir fait précéder du signe — de soustraction, après quoi on en fera la réduction, en disant, $+48-+48=0$, $-30--30=0$. Cette opération finie, il reste encore $-+16--10$ à diviser par $+8-5$. On poursuivra en disant, $+16$ divisé par $+8$ donne $+2$ ou 2; mais comme il faut faire la soustraction de ce quotient indiqué par le signe — d'opération du terme $-+16$, on posera $-2$ au quotient. On multipliera tout le diviseur par 2, ce qui donnera $+16-10$, que l'on placera sous les termes correspondans du dividende pour en faire la réduction, en disant, $-+16+16=0$, $--10-10=0$; l'opération est finie et donne $6-2=4$ pour quotient.

2°.

Divid. $+63\ -28-+27--12$ ) $+9-4$ divis.

$-+63--28\ +27\ -12$ ) $+7-3$ quot.

0 0 0 0

On se conduira dans le second exemple, dont

on a seulement figuré l'opération, comme dans les deux précédens, le procédé étant exactement le même.

## PROBLÈME IV.

Diviser le produit dividende négatif $+bc-ac-+bd---ad$ par la différence par emprunt $+b-a$.

### RÉSOLUTION.

Le produit dividende négatif proposé, qu'il s'agit de diviser, résulte de deux différences par emprunt, dont la seconde a été transformée en différence rigoureuse pour servir de multiplicateur à la composition du produit. C'est ce multiplicateur qu'il s'agit de trouver sous le nom de quotient.

### OPÉRATION.

Divid. $+bc \quad -ac-+bd---ad$ $\left\{\begin{array}{l} +b-a \text{ divis.} \\ \hline -+bc--ac \quad +bd \quad -ad \\ +c-d \text{ quot.} \end{array}\right.$

o o o o

Après avoir disposé le dividende et le diviseur, comme dans les exemples précédens, on dira, $+bc$ divisé par $+b$ donne $+c$, que l'on mettra au quotient. On multipliera les termes du diviseur $+b-a$ par $+c$, ce qui donnera $+bc-ac$. On placera les termes de ce produit sous les termes correspondans du dividende, après avoir fait précéder leur signe de quantité du signe — d'opération pour en faire la soustraction, et ensuite la réduction qui donnera o. Il restera $-+bd--ad$ à diviser par le même diviseur. On continuera l'opération en disant, $+bd$ divisé par $+b$, et non pas $-+bd$ ou $-b$ divisé par $+b$, donne $d$ pour quotient; mais, comme il en faut faire la soustraction indiquée par le signe — qui précède $+bd$, terme dividende, on écrira au quotient $-d$, ou $-+d$, pour faire appercevoir que le signe — n'est pas un signe de quantité, mais un signe d'opération. On multipliera tout le diviseur par $+d$, et les termes du produit $+bd-ad$ seront placés sous les termes correspondans du dividende, pour en faire immédiatement la réduction, parce que la soustraction s'est faite lorsqu'on a changé $-d$

en $+d$ pour en faire le multiplicateur. La réduction se fera en disant, $--+bd+bd=0$, $---ad-ad=0$. Comme il n'y a plus de terme à diviser, l'opération est finie, et le quotient est $+c-d$.

EXEMPLE

*de division complexe relative au quatrième problème dans l'ordre négatif.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Divid. $+21$ | $-56$ | $-+12$ | $--32$ | $+3-8$ | divis. |
| $--+21$ | $--56$ | $+12$ | $-32$ | $+7-4$ | quot. |
| 0 | 0 | 0 | 0 | | |

Le dividende $+21-56-+12---32$ résulte de deux facteurs négatifs proposés, $+3-8=-5$, et de $+4-7=-3$, dont le second a été transformé en facteur positif $+7-4=+3$ pour en faire un multiplicateur. C'est ce multiplicateur positif qu'il s'agit de trouver sous le nom de quotient. On suivra le même procédé tant pour la division numérique que pour la division littérale.

On commencera l'opération en disant, $+3$ est contenu $+7$ fois en $+21$; on posera 7 au

quotient. On multipliera tout le diviseur par 7, ce qui donnera +21 —56, dont on fera la soustraction en plaçant le signe — d'opération avant le signe de quantité de chaque terme, comme il suit, — + 21 — — 56; ces termes seront placés sous les termes correspondans du dividende pour en faire la réduction, en disant, +21 —+21 = 0, — 56 — — 56 = 0. Cette réduction faite, il reste — + 12 — — 32 à diviser par +3 — 8. On poursuivra l'opération, et on dira, +3 en + 12 y est contenu 4 fois; mais comme il faut faire la soustraction de ce quotient indiqué par le signe — d'opération qui précède le produit partiel + 12, on mettra — 4 au quotient, ce qui ne signifiera pas la quantité négative — 4, mais la soustraction du quotient positif + 4. On devroit à présent multiplier tout le diviseur par — 4, en suivant les règles usitées; mais comme il n'y a point de multiplicateur négatif, on multipliera tout le diviseur par +4, ce qui donnera +12 — 32, que l'on placera sous les termes correspondans, non pour en faire la soustraction qui vient d'être faite par le changement du signe négatif en

signe positif, mais pour en faire la réduction, en disant, $-+12+12=0$, $--32-32=0$; n'y ayant plus de terme à diviser, l'opération est finie, et le quotient positif résultant de l'opération, est $+7-4=+3$.

Éclaircissement sur la seconde partie de l'opération, où il s'est agi de diviser $-+12--32$ par $+3$. Supposons qu'on ait dit, $-12$ divisé par $+3$ donne $-4$, et que, selon l'usage opposé à la théorie, on eût multiplié le diviseur par $-4$, il seroit venu $-12+32$ pour produit, dont on eût fait la soustraction en changeant les signes du produit, qui se seroit converti en $+12-32$. Or c'est ce dernier produit soustrait du dividende, que l'on a obtenu sur le champ par le changement du signe $-$ en signe $+$, puisque le produit du diviseur $+3-8$ par $+4$, quotient positif, donne $+12-32$, que l'on a placé sous les termes correspondans du dividende, pour en faire immédiatement la réduction sans le soustraire, autrement on auroit fait deux soustractions au lieu d'une. On voit par là, que c'est une chose égale de soustraire et ensuite multiplier, ou de multiplier et ensuite soustraire.

OBSERVATION. Tous les livres d'algèbre donnent pour règle des signes de la division algébrique, que si le dividende et le diviseur sont affectés des mêmes signes, le quotient doit avoir le signe +; s'ils ont différens signes, le quotient doit avoir le signe —; par exemple, $\frac{+ba}{-a} = -b$, $\frac{+30}{-10} = -3$. Pour prouver le contraire, il suffit de démontrer la proposition suivante.

PROPOSITION. Les dividendes et diviseurs, affectés de signes différens, donnent des quotiens infinis.

DÉMONSTRATION. La division, par sa nature, n'est qu'une soustraction abrégée. Or, si l'on ne vouloit point abréger l'opération, il faudroit, pour avoir le quotient du dividende par le diviseur, faire la somme des nombres de fois que l'on peut soustraire le diviseur du dividende pour savoir par le nombre de ces soustractions combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende, et la somme de ces unités exprimeroit le quotient. Par exemple, pour avoir le quotient de 6 par 2, il faudroit soustraire

3 fois 2 de 6, et le nombre 3 de ces soustractions donneroit le véritable quotient. Voyons à présent quel sera le quotient de +30 par —10 en faisant usage de la soustraction.

| *Divid.* | *Divis. soustrait.* | *Résidus.* | *Quotient.* | |
|---|---|---|---|---|
| +30 | ——10 | +40 | +1 | |
| +40 | ——10 | +50 | +1 | |
| +50 | ——10 | +60 | +1 | $= \infty$ |
| +60 | ——10 | +70 | +1 | |
| +70 | ——10 | +80 | +1 | |

On voit par cette table, que le quotient de +30 par —10, bien loin de donner —3, selon les règles usitées du calcul, donne un quotient infini, puisque les résidus, qui sont les dividendes successifs, bien loin de décroître, vont toujours en augmentant; ensorte qu'il n'y auroit ni limite ni fin dans les opérations, ni dans le nombre des unités qui exprimeroient la somme du quotient.

La résolution des quatre problêmes ci-dessus peut servir de règle pour toute espèce de division avec les facteurs les plus composés. On extraira

de ces quatre problèmes et des principes qui précèdent les corollaires généraux ci-après, pour servir à la théorie du calcul concernant la division.

### COROLLAIRES GÉNÉRAUX.

1. Les unités du dividende et du diviseur, soit qu'elles fassent somme positive ou négative, différence rigoureuse ou par emprunt, doivent toujours être de même ordre et de même espèce algébrique.

2. Les quotiens, qui ne diffèrent que de nom avec les multiplicateurs, sont, comme eux, essentiellement affirmatifs et positifs.

3. Un quotient quelconque, étant toujours positif, ne peut exprimer, s'il est complexe, qu'une différence rigoureuse, et jamais une différence par emprunt qui le rendroit négatif.

4. La division n'étant qu'une soustraction abrégée, peut se diviser, comme elle, en division *rigoureuse*, division par *emprunt* et division *additionnelle*. La division rigoureuse est celle où le dividende et le diviseur étant de même ordre, le dividende est égal ou multiple du

diviseur. La division par emprunt est celle où le dividende et le diviseur étant de même ordre, il faudroit faire un emprunt pour rendre le dividende égal au diviseur : telles sont les fractions proprement dites. La division additionnelle est celle où le dividende et le diviseur étant de différens ordres, on rappelle le diviseur à l'ordre du dividende, dont il devient le facteur pour former un produit au lieu de quotient.

5. Dans toute division il y a un même rapport entre le dividende et le diviseur, qu'entre le quotient et l'unité, ce qui s'exprime par la formule $\left.\begin{matrix} +ab:+a \\ -ab:-a \end{matrix}\right\}::+b:+1$

## DES FRACTIONS ALGÉBRIQUES.

Les fractions algébriques sont des fractions numériques indiquées, composées, comme elles, d'un dénominateur et d'un numérateur séparés par un trait horizontal. Le dénominateur se place au dessous du trait, et le numérateur au dessus ; $\frac{a}{b}$ est une fraction algébrique, dont $b$ est le dénominateur, et la lettre $a$ le numérateur.

Le dénominateur d'une fraction, soit algébrique, soit numérique, est toujours égal à l'unité ; et quand elle est numérique, il indique de plus en combien de parties l'unité est divisée. Une fraction peut être égale, plus grande ou plus petite que l'unité. Elle est égale, lorsque le numérateur et le dénominateur de la fraction sont égaux ; tels sont les fractions $\frac{b}{b}$ ou $\frac{6}{6}$. Elle est plus grande lorsque le numérateur est plus grand que le dénominateur ; par exemple, $\frac{4b}{b}$ ou $\frac{12}{3}$. Elle est plus petite quand le numérateur est plus foible que le dénominateur ; telles sont les fractions $\frac{b}{4b}$ ou $\frac{3}{12}$. Ces dernières sont des fractions proprement dites, parce qu'elles expriment des parties d'unités ; les précédentes, au contraire, qui expriment des unités entières, sont des fractions improprement dites.

Une fraction quelconque ne change point de valeur, lorsque son numérateur et son dénominateur sont multipliés ou divisés par une même quantité. Soit, par exemple, la fraction $\frac{1}{3}$ ; si on multiplie son numérateur par 2, on

double la fraction qui devient $\frac{2}{3}$; si on multiplie encore son dénominateur par 2, on la dédouble, parce que la fraction retourne à sa première valeur; en effet, $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Cette propriété des fractions de ne point changer de valeur en multipliant les deux termes qui la composent par une même quantité, est le fondement de tout le calcul des fractions.

### PROBLÊME.

Les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ étant données, on demande d'en trouver la somme, la différence, le produit et le quotient.

### RÉSOLUTION.

Le problême renferme quatre cas. Pour y satisfaire, on commencera par réduire les fractions au même dénominateur, en multipliant les deux termes de la première par $d$, dénominateur de la seconde; ensuite on multipliera les deux termes de la seconde par $b$, dénominateur de la première. Par cette disposition les fractions ne changent point de valeur, mais elles prennent la forme suivante, $\frac{ad}{bd}$ et $\frac{bc}{bd}$.

1er. Cas. Pour les ajouter, on fera la somme des deux numérateurs, à laquelle on donnera le dénominateur commun, et la fraction résultante $\frac{ad+bc}{bd}$ sera la somme des fractions proposées.

2e Cas. Pour avoir leur différence, on soustraira le numérateur de la seconde du numérateur de la première, en plaçant sous cette différence le dénominateur commun, ce qui donnera $\frac{ad-bc}{bd}$ pour la différence des deux fractions.

3e Cas. Pour avoir leur produit, on multipliera numérateur par numérateur, dénominateur par dénominateur, et le résultat $\frac{adcb}{bdbd}$ sera le produit demandé.

4e Cas. Pour avoir le quotient, on divisera la première par la seconde, et l'expression $\frac{\frac{ad}{bd}}{\frac{bc}{bd}}$ sera le quotient requis.

Comme dans toute opération de calcul on doit préférer l'expression la plus simple, il est évident que les expressions du troisième et du

quatrième cas peuvent être simplifiées ; car en supprimant $bd$, valeur commune au numérateur et au dénominateur, la fraction $\frac{adcb}{bdbd}$ se réduira à la fraction $\frac{ac}{bd}$ ; et parce que le numérateur $ac$ est le produit des numérateurs des deux fractions proposées, et que $bd$ est le produit des deux dénominateurs, il s'ensuit que, pour avoir l'expression la plus simple du produit des deux fractions réduites, il faudra *multiplier numérateur par numérateur, dénominateur par dénominateur.*

L'expression du quatrième cas peut pareillement être simplifiée, en supprimant les lettres $bd$ communes aux deux rapports $\frac{ad}{bd}$ et $\frac{bc}{bd}$, ce qui réduira l'expression $\frac{\frac{ad}{bd}}{\frac{bc}{bd}}$ à la suivante $\frac{ad}{bc}$.

Mais si des deux fractions primitives données, on change le dénominateur $d$ en numérateur, et le numérateur $c$ en dénominateur, les fractions prendront la forme suivante $\frac{a}{b}$ et $\frac{d}{c}$, lesquelles, multipliées l'une par l'autre, donneront $\frac{ad}{bc}$, quotient requis simplifié. Pour l'obtenir,

il faudra *changer le numérateur de la fraction diviseur en dénominateur, et le dénominateur en numérateur, ensuite multiplier numérateur par numérateur, dénominateur par dénominateur, sans réduction préliminaire.*

Pour élever une fraction à une puissance quelconque, on élevera le numérateur et le dénominateur, que l'on regardera comme des nombres entiers, à la puissance demandée; par exemple, pour élever la fraction $\frac{a}{b}$ à la troisième puissance, on prendra la troisième puissance de $a$ et la troisième puissance de $b$, et l'on écrira $\frac{a^3}{b^3}$. Pour avoir le carré de $\frac{2}{3}$, on écrira $\frac{4}{9}$; pour avoir le cube, on écrira $\frac{8}{27}$.

L'extraction des racines des fractions se fera en prenant la racine, tant du numérateur que du dénominateur; par exemple, pour avoir la racine de la fraction $\frac{a^3}{b^3}$, on prendra la racine troisième de $a^3$ et celle de $b^3$, ce qui donnera $\frac{a}{b}$ pour la racine requise. La racine carrée de $\frac{4}{9}$ sera $\frac{2}{3}$. La racine cubique de $\frac{8}{27}$ sera $\frac{2}{3}$, parce que la racine cubique de 8 est 2, et celle de 27 est 3.

Les fractions peuvent être considérées comme des rapports. Sous cet aspect elles sont susceptibles d'une infinité d'expressions différentes toutes équivalentes; par exemple, $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{7}{14}$, $\frac{50}{100}$, sont des fractions toutes différentes en expression, cependant toutes de même valeur, le rapport de leur numérateur au dénominateur étant le même, c'est-à-dire de 1 à 2.

La division de l'unité donne une fraction proprement dite, et la division d'une fraction donne une fraction de fraction; par exemple, 1 divisé par 4 donne $\frac{1}{4}$. Si on prend le $\frac{1}{4}$ de ce $\frac{1}{4}$, on a $\frac{1}{16}$; si on prend le $\frac{1}{4}$ de ce $\frac{1}{16}$, on a $\frac{1}{64}$, qui est une fraction de fraction de fraction. On pourroit pousser plus loin ces divisions; mais en quelque nombre qu'elles soient, on pourra toujours les réduire en de simples fractions, en multipliant tous les numérateurs par les numérateurs, et les dénominateurs par les dénominateurs; c'est ainsi que l'on réduira les $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$ à la seule fraction $\frac{30}{72}$.

Une fraction est d'autant plus grande qu'elle approche plus de l'unité; $\frac{3}{5}$ est une fraction plus grande que $\frac{2}{5}$, et $\frac{4}{5}$ est plus grand que $\frac{4}{7}$.

Un entier peut toujours être mis sous la forme d'une fraction, si, en le considérant comme numérateur, on lui donne l'unité pour dénominateur; c'est ainsi que $\frac{7}{1} = 7$, $\frac{10}{1} = 10$.

Les fractions, comme les quantités entières, appartiennent à l'ordre positif ou à l'ordre négatif. $+\frac{a}{b}$ est de l'ordre positif, $-\frac{b}{c}$ est de l'ordre négatif; c'est pourquoi, en traitant les fractions de l'ordre négatif, on observera les mêmes règles que l'on a tracées pour les quantités négatives, en s'abstenant de ne jamais composer une fraction avec un numérateur et un dénominateur qui ne seroient pas du même ordre, telles que la fraction $\frac{-3}{+12}$ qui représenteroit l'unité divisée en douze parties positives, dont le quart seroit composé de trois unités négatives.

## FORMATION DES PUISSANCES.

Une quantité répétée autant de fois qu'elle contient d'unités, donne la seconde puissance. Cette seconde répétée autant de fois que la pre-

mière, donne la 3e. La troisième répétée le même nombre de fois, donne la 4e, et ainsi successivement. Ce sont ces séries de puissances que les tables suivantes représenteront.

La première table représente la formation des puissances monomes, par leurs élémens, selon la méthode des anciens. La seconde, celle des puissances monomes positives par leurs exposans. La troisième, celle des puissances négatives avec leurs exposans positifs. La quatrième, celle des puissances monomes fausses, dont les termes portent alternativement le signe + et le signe —.

## TABLE PREMIÈRE.

*Pour les puissances monomes figurées avec leurs élémens selon la méthode des anciens.*

| | | Multiplicateurs positifs. |
|---|---|---|
| La racine | $+a$ | $\times$ $+a^{\text{fois}}$ |
| donne | $+aa$ | $\times$ $+a$ |
| donne | $+aaa$ | $\times$ $+a$ |
| donne | $+aaaa$ | $\times$ $+a$ |
| donne | $+aaaaa$ | $\times$ $+a$ |
| donne | $+aaaaaa$ | $\times$ $+a$ |
| donne | $+aaaaaaa$, etc. | |

Cette première table renferme les puissances de *a* jusqu'à la septième inclusivement, notée à la manière des anciens, par juxta-position d'élémens, qui forment autant de puissances différentes. Deux *a* accolés donnent la seconde puissance, trois donnent la troisième, quatre la quatrième, etc. D'où il résulte que, dans le calcul des puissances, la juxta-position des lettres ou l'addition des exposans qui les représentent, est une véritable multiplication. Cette manière de noter les puissances, quoique embarrassante quand les puissances sont fort élevées, est très intelligible et propre à éclaircir les difficultés qui regardent les exposans négatifs. Il faut observer que l'on a figuré différemment les *a* multiplicateurs des *a* multiplicandes, par la raison que le multiplicateur, ne faisant jamais partie du produit ni des puissances, uniquement composées des lettres multiplicandes, ne doit pas être confondu avec les lettres qui composent la puissance.

## TABLE DEUXIÈME

*pour les puissances monomes de l'ordre positif, figurées avec leurs exposans.*

| | | | Multiplicateurs positifs. |
|---|---|---|---|
| La racine | $+a^1$ | × | $+a^{\text{fois.}}$ |
| donne | $+a^2$ | × | $+a$ |
| donne | $+a^3$ | × | $+a$ |
| donne | $+a^4$ | × | $+a$ |
| donne | $+a^5$ | × | $+a$ |
| donne | $+a^6$ | × | $+a$ |
| donne | $+a^7$, etc. | | |

*Progression régulière.*

$$+a^1+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6+a^7.$$

Cette table renferme les mêmes puissances positives que la précédente, avec cette différence, que l'on a substitué les exposans des puissances à la place de leurs élémens, qui sont les lettres. Le premier facteur $+a$, qui porte le nom de racine, représente la quantité qui doit être répétée pour former la seconde puissance $+a^2$. Le second facteur $+a$, qui fait la fonction de multiplicateur, n'entre point dans la composition de la

puissance $a^2$, raison pour laquelle on l'a figuré différemment. Cette table fournit une série régulière dans l'ordre positif. On l'a placée au bas de la table.

## TABLE TROISIÈME

*pour les puissances monomes de l'ordre négatif, notées avec leurs exposans positifs.*

| | | | Multiplicateurs positifs. |
|---|---|---|---|
| La racine | $-a^1$ | × | $+a^{fois.}$ |
| donne | $-a^2$ | × | $+a$ |
| donne | $-a^3$ | × | $+a$ |
| donne | $-a^4$ | × | $+a$ |
| donne | $-a^5$ | × | $+a$ |
| donne | $-a^6$ | × | $+a$ |
| donne | $-a^7$, etc. | | |

*Progression régulière.*

$$-a^1 - a^2 - a^3 - a^4 - a^5 - a^6 - a^7$$

Cette troisième table contient les puissances négatives de $-a$ jusqu'à la septième inclusivement. Le premier facteur racine $-a$, répété $+a^{fois}$ et non $-a^{fois}$ selon la méthode usitée, a donné la seconde puissance négative $-a^2$ du

même ordre que sa racine. Cette seconde puissance répétée $+a^{6ois}$, a donné la troisième $-a^3$, ainsi successivement sans mélange quelconque de l'ordre positif, ce qui exclut toute distinction de puissance paire ou impaire, puisque toutes les puissances négatives ont suivi l'ordre et l'espèce de leur racine, lesquelles ont donné une série de puissances négatives très régulières.

## TABLE QUATRIÈME

*pour les puissances monomes, alternatives, fausses et irrégulières.*

| | | | Multiplicateurs négatifs. |
|---|---|---|---|
| La racine | $-a^1$ | × | $-a$ |
| donne | $+a^2$ | × | $-a$ |
| donne | $-a^3$ | × | $-a$ |
| donne | $+a^4$ | × | $-a$ |
| donne | $-a^5$ | × | $-a$ |
| donne | $+a^6$ | × | $-a$ |
| donne | $-a^7$, etc. | | |

*Progression alternative, fausse et irrégulière,*

$$-a+a^2-a^3+a^4-a^5+a^6-a^7$$

Cette quatrième table est un mélange bizarre

de puissances négatives et positives. Le premier facteur racine $-a$, répété $-a^{\text{fois}}$, donne la puissance positive $+a^2$, comme si la répétition de la même racine pouvoit en changer la nature, l'ordre et l'espèce. Cette seconde puissance positive étant formée, on la répète $-a^{\text{fois}}$; alors cette répétition négative fait le contraire de ce qu'elle vient de faire ; elle fait passer une quantité de l'ordre positif dans l'ordre négatif, pour donner $-a^3$. C'est ainsi que de puissance négative en positive, et de positive en négative, il en résulte une fausse et ridicule progression composée d'anti-proportions géométriques dont le produit des extrêmes est diamétralement opposé à celui des moyens.

## FORMATION DES PUISSANCES BINOMES.

Les puissances binomes sont celles dont la racine est composée de deux termes ; telle est la racine $a+b$ élevée à ses différentes puissances. Nous suivrons le même ordre pour les tables des puissances binomes, que celui qui a dirigé la formation des tables pour les puis-

sances monomes. La première table contiendra les puissances positives du binome $a+b$. La seconde contiendra les puissances négatives de $-a-b$. La troisième contiendra les puissances positives de la différence rigoureuse $+a-b$, c'est-à-dire, $a > b$. La quatrième contiendra les puissances négatives de la différence par emprunt $-b+a$, dans la supposition de $a < b$.

## TABLE PREMIÈRE

*pour les puissances binomes dans l'ordre positif.*

Multiplicateurs positifs.

$+a+b \times +a+b$

$+a^2+2ab+b^2 \times +a+b$

$+a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \times +a+b$

$+a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \times +a+b$

$+a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5 \times +a+b$

$+a^6$, etc.

Cette première table de puissances binomes renferme les puissances positives du binome $a+b$ considéré comme somme, dont les puissances sont toutes affectées du signe de l'ordre

de la racine binome. On n'a pas figuré différemment les lettres multiplicateurs des lettres multiplicandes, parce qu'il suffit d'avoir averti que le multiplicateur ne fait jamais partie du produit, pour se garantir de l'illusion. La raison ne voit point d'autres lettres dans un produit, que celles du multiplicande.

## TABLE DEUXIÈME

*pour les puissances binomes dans l'ordre négatif.*

Multiplicateurs positifs.

$-a-b \times +a+b$

$-a^2-2ab-b^2 \times +a+b$

$-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3 \times +a+b$

$-a^4-4a^3b-6a^2b^2-4ab^3-b^4 \times +a+b$

$-a^5-5a^4b-10a^3b^2-10a^2b^3-5ab^4-b^5 \times +a+b$

$-a^6$, etc.

Cette seconde table donne les puissances successives du binome négatif $-a-b$. En calculant selon les règles usitées, elle eût donné les puissances successives du binome positif $+a+b$, c'est-à-dire, des résultats diamétrale-

ment opposés à ceux de la vérité. Principes de calcul bien favorables aux débiteurs ; car, soit la position d'un créancier égale $+a$, celle d'un débiteur égale $-a$. Pour rendre leur position identique, il suffit d'élever $-a$ et $+a$ à la seconde puissance, puisque la position de l'un et de l'autre deviendra subitement $+a^2$.

## TABLE TROISIÈME

*pour les puissances du binome-différence* $+a-b$, *dans l'ordre positif, en supposant* $a > b$.

Multiplicateurs positifs.

$+a-b \times +a-b$

$+a^2-2ab--b^2 \times +a-b$

$+a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \times +a-b$

$+a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3--b^4 \times +a-b$

$+a^5-5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4-b^5 \times +a-b$

$+a^6$, etc.

Cette troisième table est composée des puissances successives de la différence rigoureuse binome $+a-b$, dont les unités positives, contenues dans $+a$, sont supposées surpasser le nombre des unités négatives contenues dans

$-b$. Le dernier terme des puissances paires dans cette table porte le double signe $--$, parce qu'il s'agit de réparer un excès de soustraction, ce qui ne peut se faire qu'en ôtant le produit négatif $-b^2$; or on ne peut l'ôter qu'en employant le signe — d'opération, ce qui donne $---b^2$. C'est une erreur de théorie et non de résultat, de se servir du signe + qui indique une quantité positive au lieu de la soustraction d'une quantité négative.

## TABLE QUATRIÈME

*pour les puissances du binome-différence* $-b+a$, *dans l'ordre négatif, en supposant* $a<b$.

Multiplicateurs positifs.

$-b+a \times +b-a$

$-b^2+2ab-a^2 \times +b-a$

$-b^3+3ab^2-3a^2b--a^3 \times +b-a$

$-b^4+4ab^3-6a^2b^2+4a^3b-a^4 \times +b-a$

$-b^5+5ab^4-10a^2b^3+10a^3b^2-5a^4b---a^5 \times +b-a$

$-b^6$, etc.

Cette quatrième table est composée des puissances successives de la différence binome par

emprunt $-b+a$, dont les unités négatives, contenues dans $-b$, sont supposées surpasser le nombre des unités positives contenues dans $+a$. Pour avoir le carré ou la seconde puissance de cette différence négative par emprunt $-b+a$, bien loin de multiplier cette quantité par elle-même, selon les règles prescrites par les algébristes, on l'a multiplié par une quantité diamétralement opposée, c'est-à-dire, par $+b-a$.

Pour revenir des puissances comprises dans les quatre tables ci-dessus à leur racine, on prendra dans la première table, le premier et le dernier terme de chaque puissance, dont on extraira séparément la racine comme puissance monome, pour en former, par leur addition, la racine binome de la puissance. Par exemple, dans la seconde puissance $+a^2+2ab+b^2$ de la première table, on prendra $+a^2$ et $+b^2$, dont les racines monomes sont $a$ et $b$, lesquelles réunies donneront $+a+b$ pour la racine binome de la seconde puissance; $\sqrt{a^3}$ et $\sqrt{b^3}$ donneront $a+b$ pour racine de la troisième puissance, et ainsi des autres.

Dans la seconde table on prendra pareillement le premier et le dernier terme de chaque puissance, qui donneront pour la seconde puissance $\sqrt{-a^2}$ et $\sqrt{-b^2} = -a-b$, pour la racine binome de la puissance seconde; $\sqrt[5]{-a^5}$ et $\sqrt[5]{-b^5} = -a-b$ pour la racine de la cinquième puissance, et ainsi des autres.

Dans la troisième table on prendra le premier et le second terme de chaque puissance; on extraira la racine du premier terme comme monome, à laquelle on joindra la dernière lettre du second terme précédée du signe —, dont le second terme est affecté; c'est ainsi que la seconde puissance $+a^2-2ab$, etc. donnera pour racine $+a-b$. La troisième puissance $+a^3-3a^2b$, etc. donnera $+a-b$, et ainsi des autres.

Dans la quatrième table on prendra le premier et le second terme de chaque puissance; on extraira la racine du premier terme comme monome, à laquelle on joindra l'avant dernière lettre du second terme précédée du signe +, dont le second terme est affecté; ainsi la seconde puissance $-b^2+2ab$, etc. donnera pour ra-

cine binome $-b+a$; la troisième, quatrième, cinquième, etc. puissances, donneront également pour racine binome $-b+a$.

## FORMULE

*pour les différentes expressions d'une même puissance.*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{a}{aaaaa}$ | $\frac{a}{aaaa}$ | $\frac{a}{aaa}$ | $\frac{a}{aa}$ | $\frac{a}{a}$ | $\frac{aa}{a}$ | $\frac{aaa}{a}$ | $\frac{aaaa}{a}$ | $\frac{aaaaa}{a}$ |
| $\frac{a}{a^5}$ | $\frac{a}{a^4}$ | $\frac{a}{a^3}$ | $\frac{a}{a^2}$ | $\frac{a}{a^1}$ | $\frac{a^2}{a}$ | $\frac{a^3}{a}$ | $\frac{a^4}{a}$ | $\frac{a^5}{a}$ |
| $\frac{1}{a^4}$ | $\frac{1}{a^3}$ | $\frac{1}{a^2}$ | $\frac{1}{a^1}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{a^1}{1}$ | $\frac{a^2}{1}$ | $\frac{a^3}{1}$ | $\frac{a^4}{1}$ |
| $-a^4$ | $-a^3$ | $-a^2$ | $-a^1$ | $1^0$ | $+a^1$ | $+a^2$ | $+a^3$ | $+a^4$ |

Pour l'intelligence de cette table, il faut concevoir les colonnes verticales, composées de quatre termes égaux en valeur, formant cette suite d'équation. Par exemple, en prenant la quatrième colonne à gauche, à commencer depuis l'unité, on aura $\frac{a}{aaaa} = \frac{a}{a^4} = \frac{1}{a^3} = -a^3$. Quant aux colonnes horizontales, celles qui sont à droite contiennent les puissances en-

tières et ascendantes de la racine $a$; celles qui sont à gauche renferment les puissances fractionnaires et descendantes de la même racine; savoir, $\frac{a}{aa}$ $\frac{a}{aaa}$, etc.

Il faut spécialement observer dans cette formule d'expressions différentes d'une même puissance, que si l'on prend deux termes également éloignés à droite et à gauche du centre $\frac{a}{a}$ ou de l'unité, les produits des deux termes seront toujours égaux à l'unité; par exemple, si l'on prend le quatrième terme à gauche dans le premier rang horizontal, on aura $\frac{a}{aaaa}$; si l'on prend dans le même rang le quatrième terme à droite, on aura $\frac{aaaa}{a}$, dont le produit $\frac{a}{aaaa} \times \frac{aaaa}{a}$, donnera $\frac{aaaaa}{aaaaa} = 1$; si l'on prend le quatrième dans le second rang, on aura $\frac{a}{a^4} \times \frac{a^4}{a} = \frac{a^5}{a^5} = 1$, et non pas $a^{5-5} = a^0$, comme on le prétend; si on prend le quatrième terme dans la troisième colonne, il viendra $\frac{1}{a^3} \times \frac{a^3}{1} = \frac{a^3}{a^3} = 1$. Finalement si on prend ce

quatrième terme dans la quatrième colonne, on aura $+a^3-a^3=1$, et non pas $a^3-a^3=0$, parce que le signe — est signe de division qui donne $\frac{a^3}{a^3}=1$.

Pour faire voir l'importance de la distinction du signe — *différence* du signe — *diviseur*, soit proposé de déterminer la valeur des expressions numériques suivantes : $2+2+2+2-2$, et $2\times2\times2\times2-2$; en prenant le signe — dans une même acception, c'est-à-dire comme signe de différence, on auroit $8-2=6$ pour la première expression, et $16-2=14$ pour la seconde. Mais cette dernière valeur 14 est évidemment fausse, en ce que la fonction du signe — étant de détacher du produit un des quatre facteurs qui le précèdent, il ne doit rester que $2\times2\times2=8$, ce qui est la même chose que de rendre le dernier 2 diviseur en cette sorte, $\frac{2\times2\times2\times2}{2}=\frac{16}{2}=8$.

## TABLE

*pour transformer la division en soustraction de puissances.*

### SOUSTRACTION RIGOUREUSE.

1er. Cas.

$$\frac{+aaaa}{+a} = +aaaa - +a = +aaa = +a^3 = \frac{a^3}{1} = \frac{1}{-a^3}$$

2e Cas.

$$\frac{-aaaa}{-a} = -aaaa - -a = -aaa = -a^3 = \frac{-a^3}{1} = \frac{1}{a^3}$$

### SOUSTRACTION PAR EMPRUNT.

1er. Cas.

$$\frac{+a}{+aaaa} = +a - +aaaa = -aaa = -a^3 = \frac{-a^3}{1} = \frac{1}{a^3}$$

2e Cas.

$$\frac{-a}{-aaaa} = -a - -aaaa = +aaa = +a^3 = \frac{a^3}{1} = \frac{1}{-a^3}$$

### DIFFÉRENCE ADDITIONNELLE.

1er. Cas.

$$\frac{+aaaa}{-a} = +aaaa - -a = +aaaaa = +a^5 = +\frac{a^5}{1} = \frac{1}{-a^5}$$

2e Cas.

$$\frac{-aaaa}{+a} = -aaaa - +a = -aaaaa = -a^5 = \frac{-a^5}{1} = \frac{1}{a^5}$$

3e Cas.

$$\frac{+a}{-aaaa} = +a - -aaaa = +aaaaa = +a^5 = +\frac{a^5}{1} = \frac{1}{-a^5}$$

4e Cas.

$$\frac{-a}{+aaaa} = -a - +aaaa = -aaaaa = -a^5 = \frac{-a^5}{1} = \frac{1}{a^5}$$

Cette table fait voir, d'une manière sensible, que pour diviser une puissance par une autre, lorsque la division n'est pas additionnelle, il faut soustraire autant de lettres du dividende qu'il y en a dans le diviseur ; mais si la division est additionnelle, elle représente une vraie multiplication, puisque $\frac{+aaaa}{-a}$ s'est converti en $+aaaa+a = a^5$, et la règle pour opérer sera de changer le signe du diviseur et en faire le facteur du dividende, ce qui donnera un produit au lieu de quotient. On trouve dans cette table l'expression $\frac{a^3}{1} = \frac{1}{-a^3}$ qui n'est pas facile à saisir, parce qu'il ne vient pas dans l'idée, comment une quantité positive peut être égale à l'unité divisée par une quantité négative. Pour se convaincre du fait à n'en pouvoir douter, nous donnerons l'échelle suivante de comparaison des deux expressions $\frac{a}{aaaa}$ et $\frac{1}{aaa}$, lesquelles étant visiblement égales, conserveront leur égalité, en ajoutant successivement la lettre $a$ au numérateur de la première, et la soustrayant successivement du dénominateur de la seconde.

## ÉCHELLE DE COMPARAISON.

$$\frac{a}{aaaa} = \frac{1}{+aaa}$$

$$\frac{aa}{aaaa} = \frac{1}{+aaa-a}$$

$$\frac{aaa}{aaaa} = \frac{1}{+aaa-aa}$$

$$\frac{aaaa}{aaaa} = \frac{1}{1} = \frac{1}{+aaa-aaa} = \frac{1}{1} \text{ et non } \frac{1}{0}$$

$$\frac{aaaaa}{aaaa} = \frac{1}{+aaa-aaaa}$$

$$\frac{aaaaaa}{aaaa} = \frac{1}{+aaa-aaaaa}$$

$$\frac{aaaaaaa}{aaaa} = \frac{1}{+aaa-aaaaaa}$$

$$\frac{+a^3}{1} = \frac{1}{-a^3}$$

L'équation $\frac{+a^3}{1} = \frac{1}{-a^3}$ à laquelle on est parvenu par le moyen de cette échelle de comparaison, prouve évidemment que la puissance

positive $+a^3$ est égale à l'unité divisée par la puissance négative $-a^3$, et comme l'on auroit également la puissance négative $-a^3$ égale à l'unité divisée par la puissance positive $+a^3$, c'est-à-dire, $-a^3 = \frac{1}{a^3}$, il s'ensuit que *toute puissance positive ou négative, en changeant son signe, devient le dénominateur d'une fraction dont l'unité est le numérateur.*

Il faut prendre garde de ne pas faire l'expression $\frac{1}{aaa-aaa} = \frac{1}{0}$, parce que $aaa-aaa$ ou $a^3-a^3$, ou $a^{3-3} = 1$, et que $a^0$ est une fausse expression de calcul qui donneroit $a^0 = 0$, par la raison que tout exposant faisant la fonction de multiplicateur, 0 indiqueroit que $a$ doit être pris 0 fois; ainsi l'on auroit $a \times 0 = 0$, et non pas $a^0 = 1$, comme on le suppose ordinairement.

## CALCUL DES PUISSANCES ALGÉBRIQUES.

Les puissances algébriques peuvent être exprimées par leurs élémens qui sont les lettres, ou par les exposans qui les représentent; d'où résulte le calcul des puissances par leurs élémens, et le calcul des puissances par leurs exposans. Le premier n'est plus d'usage; mais il peut servir à éclaircir la théorie du calcul des exposans, principalement à démontrer la non existence des exposans négatifs.

### *Calcul des puissances par leurs élémens dans l'ordre positif.*

Pour ajouter $+aa$ avec $+aaa$, on réunira les quantités avec le double signe $+\,+$, pour distinguer l'addition de la multiplication, qui ne portera que le seul signe $+$; la somme demandée sera $+aaa++aa = 8+4 = 12$. Afin de pouvoir vérifier facilement les opérations, nous supposerons toujours $a = 2$.

Pour soustraire $+aa$ de $+aaa$, on placera le double signe $-\,+$ devant la grandeur à sous-

traire, afin de distinguer la soustraction de la division, qui ne portera que le seul signe —; ainsi la différence de $+aaa$ à $+aa$, sera $aaa - +aa = 8 - 4 = 4$.

Pour multiplier $+aaa$ par $+aa$, on réunira les lettres par un point, ou par le signe + d'opération, qui indiquera qu'il faut accoler les deux dernières lettres aux trois premières; c'est ainsi que l'on aura pour expression du produit demandé, $aaa + aa = aaa.aa = 8 \times 4 = 32 = aaaaa$. On voit par là que le signe + qui indique la jonction des lettres, fait l'office de multiplicateur.

Pour diviser $+aaa$ par $+aa$, on emploiera le signe — de la soustraction, en écrivant, $+aaa - aa = +a = 2$, ou l'on séparera le dividende du diviseur par un trait, comme il suit, $\frac{aaa}{aa} = \frac{8}{4} = 2$.

Pour élever $+aa$ à la troisième puissance, on triplera la racine $aa$, ce qui donnera $aaaaaa = 64$, pour la troisième puissance demandée.

Pour extraire la racine troisième de $aaaaaa$, on prendra le tiers du nombre des lettres, en écrivant $aa = 4$.

*Dans l'ordre négatif.*

Pour ajouter $-aa$ avec $-aaa$, on placera le signe + d'opération devant le signe de quantité de la grandeur à ajouter, ce qui donnera pour somme négative, $-aaa+-aa=-8-4=-12$.

Pour soustraire $-aa$ de $-aaa$, on placera le double signe $--$ avant la grandeur à soustraire, et l'on aura $-aaa--aa=-8+4=-4$.

Pour multiplier $-aaa$ par $-aa$, on réunira les lettres qui composent les deux quantités, en les faisant précéder du signe — en cette sorte, $-aaaaa=-32$, puissance équivalente au produit de $-8$ par $+4$.

Pour diviser $-aaa$ par $-aa$, on soustraira la seconde puissance en changeant son signe, et écrivant, $-aaa+aa=-a=-\frac{8}{4}=-2$.

Pour élever $-aa$ à la seconde puissance, on doublera le nombre des lettres de la racine que l'on fera précéder du signe — en cette sorte, $-aaaa=-16$. Si on vouloit élever la même racine à la troisième, quatrième puissance, on tripleroit, quadrupleroit le nombre des lettres.

Pour extraire la racine seconde de $-aaaa$, on prendra la moitié du nombre des lettres de la puissance proposée, et l'on aura $-aa$ pour la racine seconde.

*Calcul par les exposans dans l'ordre positif.*

Pour ajouter $+a^2$ avec $+a^3$, on écrira, $+a^3+a^2=8+4=+12$.

Pour soustraire $+a^2$ de $+a^3$, on écrira, $+a^3-+a^2=8-4=+4$.

Pour multiplier $+a^3$ par $+a^2$, on ajoutera les exposans des deux quantités en cette sorte, $+a^{3+2}=+a^5=32$.

Pour diviser $+a^3$ par $+a^2$, on soustraira l'exposant diviseur de l'exposant dividende, ce qui donnera $+a^{3-2}=+a^1=2$.

Pour élever $+a^2$ à la troisième puissance, on multipliera l'exposant de la puissance donnée, par l'exposant de la puissance demandée, d'où résultera $+a^{2\times3}=+a^6=64$.

Pour extraire la racine troisième de $+a^6$, on divisera l'exposant de la puissance donnée par l'exposant de la racine demandée, et l'on aura $+a^{\frac{6}{3}}=+a^2=+4$.

*Dans l'ordre négatif.*

Pour ajouter $-a^2$ avec $-a^3$, on écrira, $-a^2+-a^3=-4-8=-12$.

Pour soustraire $-a^2$ de $-a^3$, on écrira, $-a^3--a^2=-8+4=-4$.

Pour multiplier $-a^3$ par $-a^2$, on ajoutera les exposans positifs de l'une et l'autre puissance, ce qui donnera $-a^{3+2}=-a^5=-32$.

Pour diviser $-a^3$ par $-a^2$, on soustraira l'exposant diviseur de l'exposant dividende, d'où résultera $-a^{3-2}=-a^1=-2$.

Pour élever $-a^2$ à la quatrième puissance, on multipliera l'exposant 2 de la puissance donnée, par l'exposant 4 de la puissance demandée, ce qui donnera $-a^{2\times4}=-a^8=-256$.

Pour extraire la racine quatrième de $-a^8$, on divisera l'exposant de la puissance donnée, par l'exposant de la racine cherchée, il viendra $-a^{\frac{8}{4}}=-a^2=-4$.

*Calcul des racines de puissances.*

Pour former les puissances de $a$, on a multiplié successivement son exposant 1 par 2,

par 3, par 4, par 5, etc. ce qui a donné les puissances $a^2$, $a^3$, $a^4$, $a^5$, etc. Donc pour en extraire les racines, il faudra diviser par 2, par 3, par 4, par 5, etc. les exposans des puissances, dont le quotient rendra la racine; c'est ainsi que $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{2}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{4}{2}}$, $a^{\frac{5}{2}}$, etc. indiqueront les racines carrées; $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{2}{3}}$, $a^{\frac{3}{3}}$, $a^{\frac{4}{3}}$, $a^{\frac{5}{3}}$, etc. indiqueront les racines cubiques, et ainsi des autres.

On indique encore les mêmes racines par le signe $\surd$, auquel on donne le nom de signe radical, en plaçant entre les branches du signe l'exposant de la racine, et mettant après le radical la puissance accompagnée de son exposant; les expressions radicales qui répondront aux exposans fractionnaires ci-dessus, seront les suivantes : $\sqrt[2]{a^1}$, $\sqrt[2]{a^2}$, $\sqrt[2]{a^3}$, $\sqrt[2]{a^4}$, $\sqrt[2]{a^5}$ pour les racines carrées; $\sqrt[3]{a^1}$, $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[3]{a^3}$, $\sqrt[3]{a^4}$, $\sqrt[3]{a^5}$, etc. pour les racines cubiques, et ainsi des autres racines. De ces deux manières d'exprimer une même chose, résultent deux espèces de calcul, le calcul des exposans fractionnaires, et le calcul des radicaux.

## *Calcul des exposans fractionnaires dans l'ordre positif.*

Pour ajouter $a^{\frac{1}{4}}$ avec $a^{\frac{2}{3}}$, on indiquera l'addition, en plaçant le signe + avant la quantité qui doit être ajoutée, en cette sorte, $a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{4}}$. Somme.

Pour soustraire $a^{\frac{1}{4}}$ de $a^{\frac{2}{3}}$, on placera le signe — de soustraction avant la quantité à soustraire, comme il suit, $a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{4}}$. Différence.

Pour multiplier $a^{\frac{2}{3}}$ par $a^{\frac{1}{4}}$, on ajoutera l'exposant de la quantité multiplicateur, à l'exposant de la quantité multiplicande, en cette sorte, $a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}} = a^{\frac{11}{12}}$. Produit.

Pour diviser $a^{\frac{2}{3}}$ par $a^{\frac{1}{4}}$, on soustraira l'exposant diviseur de l'exposant dividende, comme il suit, $a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}} = a^{\frac{8}{12}-\frac{3}{12}} = a^{\frac{5}{12}}$. Quotient.

Pour élever $a^{\frac{2}{3}}$ à la puissance $\frac{1}{4}$, on multipliera l'exposant de la puissance donnée, par l'exposant de la puissance demandée; il viendra $a^{\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{6}}$. Puissance.

Pour extraire la racine $\frac{1}{4}$ de la puissance $a^{\frac{1}{6}}$,

on divisera l'exposant $\frac{1}{6}$ de la puissance donnée, par l'exposant $\frac{1}{4}$ de la racine cherchée ; l'on aura pour racine $a^{\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}} = a^{6} = a^{\frac{2}{3}}$. Racine.

*Dans l'ordre négatif.*

Pour ajouter $-a^{\frac{2}{3}}$ avec $-a^{\frac{1}{4}}$, on écrira $-a^{\frac{2}{3}} + -a^{\frac{1}{4}}$.

Pour soustraire $-a^{\frac{1}{4}}$ de $-a^{\frac{2}{3}}$, on écrira $-a^{\frac{2}{3}} - -a^{\frac{1}{4}}$.

Pour multiplier $-a^{\frac{2}{3}}$ par $-a^{\frac{1}{4}}$, on écrira $-a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}$.

Pour diviser $-a^{\frac{2}{3}}$ par $-a^{\frac{1}{4}}$, on écrira $-a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}}$

Pour élever $-a^{\frac{2}{3}}$ à la puissance $\frac{1}{4}$, on écrira $-a^{\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}} = -a^{\frac{1}{6}}$.

Pour extraire la racine $\frac{1}{4}$ de $-a^{\frac{1}{6}}$, on écrira $-a^{\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}} = -a^{\frac{4}{6}} = -a^{\frac{2}{3}}$.

## CALCUL DES RADICAUX.

Les racines des puissances imparfaites qui ne peuvent être évaluées que par approximation, telles que $\surd^2$, $\surd^3$, $\surd^5$, etc. sont désignées par le signe $\surd$, comme on l'a dit ci-devant. Le calcul où l'on emploie ce signe, s'appelle le calcul des radicaux. La quantité précédée du radical, indique la puissance, et l'exposant placé entre les côtés de l'angle du radical, désigne le degré de la racine. Quand le radical est sans exposant, il est toujours censé avoir l'exposant 2; ainsi $\surd a$ est la même chose que $\surd^2 a$.

Le calcul des radicaux est un calcul surnuméraire, qui donne les mêmes résultats que celui des exposans fractionnaires, avec cette différence que le calcul des exposans est plus conforme à la nature de la chose, que celui des radicaux. On pourroit donc absolument se passer de ce dernier; mais comme tous les livres d'algèbre en font mention, on ne peut se dispenser d'en donner une idée. Ce n'est point par exclusion que le signe radical se met avant

les puissances imparfaites $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, etc. on peut également le mettre avant les puissances parfaites, 4, 9, 16, etc. et c'est ce que nous ferons pour confirmer par l'évaluation exacte de ces racines parfaites, la certitude des règles concernant les radicaux.

Pour opérer sur les radicaux, il faut qu'ils aient un même exposant, autrement les quantités ne seroient point homogènes et de même dimension, conséquemment ne pourroient former ni somme ni produit. Par exemple, on ne pourroit écrire $\sqrt[3]{a} + \sqrt[2]{a}$ pour exprimer la somme des deux radicaux, parce que le premier exprimeroit des unités ou parties d'unités cubiques, et le second des unités ou parties d'unités carrées.

Pour réduire deux radicaux à un même exposant, on multipliera l'exposant du premier radical et l'exposant de la quantité sous le signe, par l'exposant du second radical, et réciproquement on multipliera l'exposant du second radical et l'exposant de la quantité qui est sous le signe, par l'exposant du premier radical. Par exemple, pour réduire $\sqrt[3]{c^2}$ et $\sqrt[2]{d^1}$ au même

exposant, on multipliera l'exposant 3 du premier radical et l'exposant 2 de la quantité $c$ sous le signe, par l'exposant 2 du second radical, ce qui donnera $\sqrt[6]{c^4}$ pour le premier radical réduit. On multipliera pareillement l'exposant 2 du second radical, et l'exposant 1 de la quantité $d$ sous le signe, par l'exposant 3 du premier radical, ce qui donnera $\sqrt[6]{d^3}$ pour le second radical réduit au même exposant 6 comme le premier; ensorte que les radicaux $\sqrt[3]{c^2}$ et $\sqrt[2]{d^1}$, qui n'étoient susceptibles d'aucune opération, deviennent après leur réduction au même exposant, susceptibles de toutes les opérations de calcul, comme on le verra par l'application sur les radicaux de même exposant $\sqrt[2]{5}$ et $\sqrt[2]{3}$.

*Calcul des radicaux dans l'ordre positif.*

Pour ajouter $\sqrt[2]{5}$ avec $\sqrt[2]{3}$, on réunira les radicaux par le signe +, en cette sorte, $\sqrt[2]{5}+\sqrt[2]{3}$; quantité dont on ne peut avoir la valeur que par approximation. Mais si on propose $\sqrt[2]{16}$ et $\sqrt[2]{4}$ à ajouter, on aura pour la forme de l'opération $\sqrt[2]{16}+\sqrt[2]{4}$, et pour résultat $4+2=6$,

puisque $\sqrt{16} = 4$, et $\sqrt{4} = 2$; et parce que cette évaluation est évidemment vraie, on pourra employer les radicaux des puissances parfaites, pour vérifier les règles de calcul concernant les radicaux des puissances imparfaites.

Pour soustraire $\sqrt[2]{3}$ de $\sqrt[2]{5}$, on placera le signe — de soustraction avant le radical à soustraire, en cette sorte, $\sqrt[2]{5} - \sqrt[2]{3}$; quantité dont on ne peut avoir la valeur que par approximation. Pour certifier la validité de la règle, on supposera que l'on ait à soustraire $\sqrt[2]{4}$ de $\sqrt[2]{16}$, l'on aura $\sqrt[2]{16} - \sqrt[2]{4}$ pour la forme de l'opération, et $4 - 2 = 2$ pour résultat, ce qui est la vérité même, puisque la différence de 4 à 2 est exactement 2, et que $4 = \sqrt[2]{16}$, et $2 = \sqrt[2]{4}$.

Pour multiplier $\sqrt[2]{5}$ par $\sqrt[2]{3}$, on multipliera les quantités sous le signe l'une par l'autre, et l'on fera précéder leur produit du signe radical commun, ce qui donnera $\sqrt[2]{5 \times 3} = \sqrt[2]{15}$. Soit $\sqrt[2]{16}$ à multiplier par $\sqrt[2]{4}$, on aura $\sqrt[2]{16 \times 4} = \sqrt[2]{64} = 8$; résultat vrai, puisque $4 \times 2 = 8$, et que $4 = \sqrt[2]{16}$, et $\sqrt[2]{4} = 2$.

Pour diviser $\sqrt[2]{5}$ par $\sqrt[2]{3}$, on divisera la quantité qui est sous le signe radical dans le dividende, par la quantité qui est sous le signe radical dans le diviseur, et l'on placera le radical avec son exposant avant le quotient, comme il suit, $\sqrt[2]{\frac{5}{3}}$. De même pour diviser $\sqrt[2]{16}$ par $\sqrt[2]{4}$, on écrira $\sqrt[2]{\frac{16}{4}} = \frac{4}{2} = 2$; en effet, proposer de diviser $\sqrt[2]{16}$ par $\sqrt[2]{4}$, c'est proposer de diviser 4 par 2, dont le quotient est évidemment 2.

Pour élever $\sqrt[2]{5}$ à la seconde puissance qui est celle du radical, on fera le carré de la quantité sous le signe qui donnera $\sqrt[2]{25}$; et parce que $\sqrt[2]{25} = 5$, il s'ensuit que pour élever une quantité sous le signe, à une puissance égale à celle de l'exposant du signe, il suffit de supprimer le signe radical de la racine. Ainsi, pour élever $\sqrt[2]{5}$ au carré, on écrira 5; pour élever $\sqrt[3]{8}$ à la troisième puissance, on écrira 8; ce qui est évident, puisque $\sqrt[3]{8}$ étant $= 2$, sa troisième puissance doit être 8.

Pour extraire la racine troisième de $\sqrt[2]{64}$, on multipliera l'exposant 2 du radical proposé, par l'exposant 3 de la racine demandée; le

produit de ces deux exposans sera l'exposant du radical qui précédera la puissance 64, dont on demande la racine ; c'est ainsi que l'on obtiendra $\sqrt[2\times3]{64}$ ou $\sqrt[6]{64}=2$ pour la valeur de la racine cherchée. En effet, on a demandé la racine troisième de la racine seconde de 64. La racine 2e de 64 est 8, donc la racine 3e est 2.

*Dans l'ordre négatif.*

Pour ajouter $-\sqrt[2]{3}$ avec $-\sqrt[2]{5}$, on écrira $-\sqrt[2]{5}+-\sqrt[2]{3}$.

Pour soustraire $-\sqrt[2]{3}$ de $-\sqrt[2]{5}$, on écrira $-\sqrt[2]{5}--\sqrt[2]{3}$.

Pour multiplier $-\sqrt[2]{5}$ par $-\sqrt[2]{3}$, on écrira $-\sqrt[2]{15}=-\sqrt[2]{5\times3}$.

Pour diviser $-\sqrt[2]{5}$ par $-\sqrt[2]{3}$, on écrira $-\sqrt[2]{\frac{5}{3}}$.

Pour élever $-\sqrt[2]{5}$ à la deuxième puissance, on écrira $-5$ ou $-\sqrt[2]{25}$.

Pour extraire la racine troisième de $-\sqrt[2]{64}$, on écrira $-\sqrt[6]{64}=2$.

*Nota.* Il émane des erreurs si prodigieuses de calcul, des multiplicateurs négatifs, que, si

elles n'étoient consignées dans des livres d'algèbre, elles paroîtroient incroyables. Pour mettre cette assertion au plus haut degré d'évidence, nous extrairons un exemple du premier volume de l'Analyse déterminée, page 256. C'est le cube de $-1+\sqrt{-3}$, dont l'opération est figurée ci-après en entier.

$-1+\sqrt{-3}$ racine négative.
$-1+\sqrt{-3}$ multiplicateur négatif.

$$+1-\sqrt{-3}$$
$$-\sqrt{-3}-3$$
$$+1-2\sqrt{-3}-3 = -2-2\sqrt{-3}$$
$$-1+\sqrt{-3}$$
$$+2+2\sqrt{-3}$$
$$-2\sqrt{-3}+6$$
$$+2 \qquad +6=8 \text{ cube.}$$

Nous observerons, 1°. que $+8$, résultat de l'opération, est évidemment le cube de $+2$; mais $-1+\sqrt{-3}$ n'est égal ni à $+2$ ni à $-2$; $+8$ n'en peut donc pas être le cube. 2°. $+8$ est le cube de $+1+\sqrt{+1}$; s'il étoit encore le cube

de $-1+\sqrt{-3}$, on auroit l'équation $+1+\sqrt{+1}=-1+\sqrt{-3}$; mais cette équation est évidemment fausse, puisqu'elle péche en quantité et en qualité : donc 8 ne peut pas être le cube de $-1+\sqrt{-3}$, étant celui de $+1+\sqrt{+1}$.

3°. Toute puissance impaire d'une quantité négative, doit être négative, suivant les principes mêmes de l'auteur; mais la puissance troisième est une puissance impaire, la quantité $-1+\sqrt{-3}$ est négative, donc le cube positif $+8$ ne peut pas être celui de $-1+\sqrt{-3}$.

Que le lecteur juge à présent s'il est possible de porter plus loin une erreur de calcul. Offrir un résultat qui péche en quantité, en qualité, et qui, en outre, est en contradiction avec les principes mêmes du calculateur, c'est offrir le tableau de l'apogée des erreurs. Pour ne rien laisser à désirer et procurer une conviction parfaite, nous allons reprendre le problême auquel nous ferons l'application des vrais principes du calcul.

## PROBLÊME.

Trouver la valeur du cube de $-1+\sqrt{-3}$.

### RÉSOLUTION.

La racine proposée étant dans l'ordre négatif, doit donner une puissance de même ordre. Pour cet effet, on fera usage des principes de l'ordre négatif ($-a \times +b$) pour avoir un facteur positif; en conséquence on changera les signes de la racine proposée, ce qui donnera pour les facteurs du cube à construire, $-1+\sqrt{-3}$ et $+1-\sqrt{-3}$, dont on fera le produit de la manière suivante.

### OPÉRATION.

$$\begin{array}{l} -1+\sqrt{-3} \text{ racine négative.} \\ +1-\sqrt{-3} \text{ multiplicateur positif.} \\ \hline -1+\sqrt{-3} \\ \quad --\sqrt{-3}-3 \\ \hline -1+2\sqrt{-3}-3 \end{array} = \begin{array}{l} -4+2\sqrt{-3} \\ +1-\sqrt{-3} \\ \hline -4+2\sqrt{-3} \\ \quad --4\sqrt{-3}-6 \\ \hline -10+6\sqrt{-3} \text{ cube.} \end{array}$$

Si on plaçoit le signe — avant le radical, on auroit les facteurs $-1-\sqrt{3}$ et $+1+\sqrt{3}$, dont le cube est le même que le précédent.

$-1-\sqrt{3}$ racine négative.
$+1+\sqrt{3}$ multiplicateur positif.

$$\begin{array}{r} -1-\sqrt{3} \\ \quad -\sqrt{3}-3 \\ \hline -1-2\sqrt{3}-3 \end{array} = \begin{array}{r} -4-2\sqrt{3} \\ +1+\sqrt{3} \\ \hline -4-2\sqrt{3} \\ \quad -4\sqrt{3}-6 \\ \hline -10-6\sqrt{3} \end{array}$$

cube.

Cette dernière opération, dans laquelle la prétendue imaginaire $\sqrt{-3}$ a été changée en $-\sqrt{3}$, est une démonstration complète de la superfluité et nullité des racines imaginaires, puisque si $-\sqrt{3}$ n'est pas une imaginaire, $\sqrt{-3}$ qui lui est égale, n'en sera pas une. Il faut faire attention que $+6\sqrt{-3}$ qui se trouve dans le résultat de la première opération, et $-6\sqrt{3}$ qui se trouve dans celui de la seconde, sont deux expressions différentes d'une même valeur; car, supposons $-4$ au lieu de $-3$, les expressions

se changeront en $+6\sqrt{-4}$ et $-6\sqrt{4}$. Or, l'une et l'autre expressions sont égales à $-12$; car $+6\sqrt{-4} = -2\times6 = -12$ et $-6\sqrt{4} = -6\times2 = -12$.

Pour ne rien laisser à désirer sur la preuve des opérations, nous changerons la racine irrationnelle $-1+\sqrt{-3}$ en racine rationnelle $-1+\sqrt{-4} = -3$, dont le cube est évidemment $-27$ de même ordre que sa racine; il faut donc que le procédé de l'opération conduise à ce nombre $-27$, pour ne laisser aucun doute sur la vérité des principes.

A $-1+\sqrt{-4}$ racine négative.
$+1-\sqrt{-4}$ multiplicateur positif.

$-1+1\sqrt{-4}$
$--1\sqrt{-4}-4$

$-1+2\sqrt{-4}-4 = -5+2\sqrt{-4}$
$+1-\sqrt{-4}$

$-5+2\sqrt{-4}$
$--5\sqrt{-4}-8$

$-5+7\sqrt{-4}-8 = -13-14 = -27$

Si on place le signe — avant le radical, on aura $-1-\sqrt{4}$ pour la racine dans l'ordre né-

gatif, dont on changera les signes pour avoir un multiplicateur positif, après quoi on opérera comme il suit :

B
$$\begin{array}{l} -1-\sqrt{4} \text{ racine négative.} \\ +1+\sqrt{4} \text{ multiplicateur positif.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -1-1\sqrt{4} \\ \quad -1\sqrt{4}-4 \\ \hline -1-2\sqrt{4}-4=-5-2\sqrt{4} \\ \qquad\qquad +1+\sqrt{4} \\ \hline -5-2\sqrt{4} \\ \quad -5\sqrt{4}-8 \\ \hline -5-7\sqrt{4}-8=-13-14=-27 \end{array}$$

Les opérations A et B ont donné l'une et l'autre le même cube $-27$, quoique les expressions des racines soient bien différentes, la première étant $-1+\sqrt{-4}$ qui contient une imaginaire, et la seconde $-1-\sqrt{4}$ qui n'en contient point. Preuve convaincante que toute quantité négative, paire ou impaire, qui est sous le signe radical, est très réelle, et que ceux qui ont dit que de pareilles quantités étoient impossibles et chimériques, ont avancé

des choses très fausses et très déraisonnables, puisque si $-\sqrt{4}$ n'est pas une imaginaire ni une impossible, $\sqrt{-4}$ qui lui est égal, n'en sera pas une ; mais ils paroissent avoir mis le comble à l'absurdité, quand ils ont dit que les imaginaires, nombres impossibles et chimériques, suivant eux, étoient de la plus grande utilité. En effet, dire que les imaginaires sont de la plus grande utilité, c'est dire qu'elles ne sont ni impossibles, ni chimériques, l'impossible ne servant à rien du tout.

Comme l'on pourroit se trouver embarrassé sur le produit des facteurs $+\sqrt{-4}$ et $-\sqrt{-4}$ de l'opération précédente désignée par A, il faudra réduire les facteurs en $+-2$ et $--2$, ou ce qui est le même, en $-2$ et $+2$, dont le produit est visiblement $-4$ et non pas $+4$, comme on pourroit le soupçonner.

*Résolution des fractions en suites infinies.*

On distingue deux espèces de fractions ; les fractions proprement dites dont la valeur est au dessous de l'unité entière, telles que $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{7}$, etc. ; et les fractions improprement dites dont

la valeur est égale, ou au dessus de l'unité, telles que $\frac{1}{1}$, $\frac{15}{4}$, $\frac{27}{5}$, etc.

On distingue aussi deux espèces de suites infinies ou séries : les séries convergeantes dont chaque terme conséquent est plus foible que son antécédent, telle est la suite 32, 16, 8, 4, 2, etc. ; et les séries divergeantes dont chaque terme conséquent est plus fort que son antécédent, telle est la suite 2, 4, 8, 16, 32, etc. Nous traiterons principalement des séries convergeantes : à cet effet nous ne ferons usage que de la formule $\frac{1}{a-1}$ avec la supposition de $a > 1$, parce que si $a$ étoit plus foible que 1, le diviseur $a-1$ deviendroit négatif et d'un ordre différent du dividende, ce qui donneroit une série divergeante. Si l'on prenoit la formule $\frac{1}{1-a}$, l'unité seroit toujours comprise dans les termes de la série, laquelle n'exprimeroit point une suite de fractions proprement dites, parce que toute série qui contient l'unité pour un de ses termes, étant toujours plus forte que l'unité entière, ne peut être l'expression d'une fraction proprement dite.

Pour réduire en série ou suites infinies la formule $\frac{1}{a-1}$, on procédera comme on le voit dans l'opération figurée ci-après. Voici la manière d'extraire de la formule les termes de la série. Après avoir placé l'unité dividende entre deux crochets, on placera le diviseur à gauche du premier crochet, et les termes successifs de la série se placeront à droite du second. Cette préparation faite, on dira, 1 divisé par $a$ donne pour quotient $\frac{1}{a}$ que l'on placera à droite du second crochet; ce sera le premier terme de la série. On multipliera ce premier quotient $\frac{1}{a}$ par le diviseur $+a-1$, ce qui donnera $+\frac{a}{a}-\frac{1}{a}$ dont on fera la soustraction, en plaçant le signe — d'opération devant le signe de quantité des deux termes du produit à soustraire, en cette sorte, $-+\frac{a}{a}--\frac{1}{a}$. Cette soustraction faite, il en faudra faire la réduction avec l'unité dividende, en disant, $-+\frac{a}{a}+1=0$, que l'on placera sous le premier terme du produit $-+\frac{a}{a}$, et il restera $--\frac{1}{a}$ que l'on transportera à

côté du o pour servir de dividende à l'opération suivante, après avoir souligné.

On poursuivra en disant, $--\frac{1}{a}$ divisé par $+a$ donne $+\frac{1}{a^2}$, second terme de la série que l'on placera après le premier; on multipliera ensuite ce second terme $+\frac{1}{a^2}$ par le diviseur $+a-1$; on aura $+\frac{a}{a^2}-\frac{1}{a^2}$, dont on fera la soustraction en écrivant $-+\frac{a}{a^2}--\frac{1}{a^2}$, et ensuite la réduction avec le dividende $--\frac{1}{a}$; et parce que $--\frac{1}{a}$ et $-+\frac{a}{a^2}=o$, on placera o sous $-+\frac{a}{a^2}$, et il restera $--\frac{1}{a^2}$ pour dividende de la troisième opération.

On continuera en disant, $--\frac{1}{a^2}$ divisé par $+a$ donne $+\frac{1}{a^3}$, qui sera le troisième terme de la série que l'on multipliera par le diviseur, en suivant pour le reste le même procédé que ci-dessus, comme il est indiqué par la figure de l'opération que l'on poursuivra aussi loin que l'on voudra. Il est bon de faire attention que les séries régulières suivent de certaines loix

dans leur marche, qui se font remarquer dans les trois ou quatre premiers termes, ce qui dispense de calculer les autres que l'on place à la suite des premiers, conformément à la loi observée.

$$+a-1\Big)\ 1\ \Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5},\ \text{etc.}$$

$$-+\frac{a}{a}--\frac{1}{a}$$

$$0--\frac{1}{a}$$

$$-+\frac{a}{a^2}--\frac{1}{a^2}$$

$$0--\frac{1}{a^2}$$

$$-+\frac{a}{a^3}--\frac{1}{a^3}$$

$$0--\frac{1}{a^3}$$

$$-+\frac{a}{a^4}--\frac{1}{a^4}$$

$$0--\frac{1}{a^4}$$

$$-+\frac{a}{a^5}--\frac{1}{a^5}$$

$$0--\frac{1}{a^5},\ \text{etc.}$$

Pour faire l'application de cette formule générale, si on suppose $a$ successivement $= 3$ ou 4, ou 5, ou 10, on aura les séries ou suites infinies convergentes, qui seront les expressions des aliquotes de l'unité, comme on le voit ci-après.

*Séries convergentes.*

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}=\frac{1}{2}=\frac{1}{3-1}$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\frac{1}{1024}=\frac{1}{3}=\frac{1}{4-1}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{225}+\frac{1}{625}+\frac{1}{3125}=\frac{1}{4}=\frac{1}{5-1}$$

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+\frac{1}{100000}=\frac{1}{9}=\frac{1}{10-1}$$

On voit par ces différentes suites, que pour avoir en série une aliquote de l'unité, telle que $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{9}$, etc. il suffit de faire dans la formule la lettre $a$ d'une unité plus forte que le dénominateur de la fraction de l'aliquote qu'on veut avoir. Par exemple, pour avoir en série l'aliquote $\frac{1}{4}$, il faut faire $a = 5$; pour $\frac{1}{5}$, $a = 6$, pour $\frac{1}{9}$, $a = 10$, et ainsi des autres.

La formule $\frac{1}{a-1}$ qui a donné la suite infinie $\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}$, etc. est la vraie formule des fractions proprement dites réduites en séries; il faut seulement prendre garde de ne jamais supposer $a$ plus foible que l'unité, parce que le dividende étant dans l'ordre positif, le diviseur se trouveroit dans l'ordre négatif, d'où résulteroit une série fausse et divergente, comme on le voit par la série suivante, où la lettre $a$ a été supposée $= \frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2}-1)\ +1\ (+2+4+8+16+32$, etc.

$-+\frac{2}{2}--2$

$0--2$

$-+\frac{4}{2}--4$

$0--4$

$-+\frac{8}{2}--8$

$0--8$

$-+\frac{16}{2}--16$

$0--16$

$-+\frac{32}{2}--32$

$0--32$, etc.

La suite infinie que nous venons d'extraire de l'unité est l'expression d'un infiniment grand, dont la valeur est moins que rien, puisqu'elle donne l'équation suivante, $2+4+8+16+32$, etc. $= -\frac{1}{2}$. Quoique suivant nous, de pareilles suites soient une grande absurdité, nous rapporterons néanmoins les preuves que l'on donne de leur existence, pour en faire voir le peu de solidité.

L'auteur de l'analyse déterminée, page 224 et suivantes, après avoir extrait de la formule $\frac{1}{1-a}$ la suite infinie $1+a+a^2+a^3+a^4+a^5$, etc. s'exprime ainsi : « Si l'on suppose $a=2$, notre « suite devient $1+2+4+8+16+32+64$, etc. à « l'infini, et sa valeur doit être $\frac{1}{1-2}$, c'est-à-dire, « $\frac{1}{-1}=-1$, ce qui, au premier coup d'œil, « semblera absurde. »

Rép. Nous observerons, 1°. que l'équation $1+2+4+8+16$, etc. $=-1$, n'est pas une absurdité apparente, mais qu'elle est très réelle, étant impossible qu'une unité négative, au dessous de zéro, dans le sentiment de l'auteur, puisse égaler une somme infinie d'unités posi-

tives; 2°. que l'équation $\frac{1}{-1} = -1$ est une équation fausse, parce que le dénominateur d'une fraction hétérogène au numérateur, en changeant son signe en devient le facteur; c'est ainsi que $\frac{1}{-a^3} = 1 \times a^3 = +a^3$, comme on l'a fait voir dans l'échelle de comparaison à la suite de la table, pour transformer la division en soustraction de puissance. Dont l'équation doit être corrigée en $\frac{1}{-1} = +1$.

« L'auteur, pour prouver son assertion, dit, « que si l'on veut s'arrêter à quelque terme de « la série susdite, on ne doit le faire qu'en joi- « gnant la fraction qui reste. Supposons, par « exemple, que nous voulions nous arrêter à « 64, il faudra, après avoir écrit $1+2+4+8+$ « $16+32+64$, joindre la fraction $\frac{128}{1-2}$, ou $\frac{128}{-1}$, « ou $-128$ : on auroit donc $127 - 128$; c'est « en effet $-1$. »

Rép. Voilà l'erreur et la fausseté, parce que $\frac{128}{-1} = +128$ et non $-128$; ainsi l'auteur sera bien loin de son compte, $+128$ devant être

ajouté à 127, ce qui lui donnera 255 et non pas — 1.

« L'auteur continue en disant : Voilà des con-
« sidérations nécessaires quand on prend pour
« $a$ des nombres plus grands que l'unité; mais
« si l'on suppose $a$ plus petit que l'unité ou 1,
« tout devient plus facile à concevoir. Soit, par
« exemple, $a = \frac{1}{2}$, on aura $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}}$
« $= 2$, ce qui sera égal à la série suivante :
« $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$, etc. à l'in-
« fini. »

Rép. Il est certain que la série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, etc. ne renferme pas les absurdités de la précédente; mais comme une série quelconque qui renferme l'unité est plus forte que l'unité de l'excédant des termes qui l'accompagnent, elle appartient aux entiers et non aux fractions réduites en séries, comme le porte le titre du chapitre, ce qui vient d'avoir pris pour formule $\frac{1}{1-a}$, laquelle réduite en série donne toujours l'unité dans un de ses termes, au lieu que la formule $\frac{1}{a-1}$ ne donne que des termes fractionnaires.

« Le même auteur ajoute, qu'on pourra de « la même manière résoudre en séries infinies « la fraction $\frac{1}{1+a}$; d'où il suit que la fraction $\frac{1}{1+a}$ « est égale à la suite $+1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$ « $+a^6-a^7$, etc. Si l'on pose $a=1$, on a cette « comparaison remarquable, $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}=1-1$ « $+1-1+1-1+1$, etc. à l'infini. On y trou- « vera quelque chose de contradictoire; car si « on s'arrête à $-1$, la série donne 0, et si on « finit par $+1$, elle donne 1. Mais c'est là pré- « cisément ce qui tranche le nœud; car puis- « qu'on doit continuer jusqu'à l'infini sans s'ar- « rêter jamais ni à $-1$, ni à $+1$, il est clair « que la somme ne peut être ni 0, ni 1, et « qu'il faut que ce résultat final tienne un mi- « lieu entre ces deux, et qu'il soit $\frac{1}{2}$. »

Rép. Quand on jette l'œil sur la série alternative $1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$, etc. extraite de la formule $\frac{1}{1+a}$, on ne la voit composée que des fausses et ridicules proportions $-a:+a^2::+a^2:-a^3$, $+a^2:-a^3::-a^3:+a^4$, etc. parce que les termes des rapports $-1:+a$, ou $+a^3:-$

$a^4$, etc. étant de différens ordres, de différentes espèces algébriques, donnent de faux rapports, de fausses raisons, incompétentes à former de vraies proportions géométriques. L'application que l'auteur fait de sa série aux valeurs numériques, en est une preuve.

Si l'on pose $a = 1$, on a cette comparaison remarquable, $\frac{1}{2} = 1-1+1-1+1$, etc. équation fausse qui donne $\frac{1}{2} = 0+0+1$. On aura beau augmenter le nombre des termes, l'équation sera toujours la même, et l'on aura $\frac{1}{2} = 1-1=0, +1-1=0, +1-1=0, +1-1=0, +1$. Il n'est donc pas surprenant qu'en s'arrêtant à 0 on ait 0, et en s'arrêtant à $+1$ on ait $+1$; car quand on s'arrête à $-1$, on s'arrête à la fin de $+1-1=0$. L'auteur dit qu'il faut continuer à l'infini sans jamais s'arrêter pour trouver le milieu entre 0 et l'unité; d'où il suit que le milieu de l'infini et le milieu entre 0 et l'unité, seront deux milieux identiques $= \frac{1}{2}$. Raisonnement singulier dont on se sert pour étayer des absurdités; tel est le chapitre de la résolution des fractions en des suites infinies de l'analyse déterminée. Voici une table des séries qu'il contient, tant littérales que numériques.

*Table de séries littérales.*

$$\frac{1}{1-a} = 1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6+a^7+a^8$$

$$\frac{1}{1+a} = 1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+a^6-a^7+a^8$$

$$\frac{1}{a+1} = \frac{1}{a}-\frac{1}{aa}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}-\frac{1}{a^6}+\frac{1}{a^7}-\frac{1}{a^8}$$

$$\frac{1}{1-a+aa} = 1+a-a^3-a^4+a^6+a^7-a^9-a^{10}+a^{12}+a^{13}$$

*Table de séries numériques.*

$$\frac{1-1}{1} = 1+1+1+1+1+1+1+1+1 \text{ etc.} = \frac{1}{0}$$

$$\frac{1}{1-2} = 1+2+4+8+16+32+64, \text{etc.} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}, \text{ etc.} = 2$$

$$\frac{1}{1+1} = 1-1+1-1+1-1+1-1+1, \text{ etc.} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1-1+1} = 1+1-1-1+1+1-1-1+1+1, \text{etc.} = 2$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}, \text{etc.} = \frac{4}{3}$$

La première suite est composée d'une infinité d'unités dont la somme ne vaut qu'une partie de o; car quel autre sens donner à l'expression $\frac{1}{0}$, qui ne peut exprimer un rapport quelconque, puisqu'il n'en existe aucun entre la réalité absolue et le rien absolu, entre l'unité et le zéro, qui représente l'extinction de toute quantité? En effet on ne peut pas dire, dans le cas présent, que o représente un infiniment petit, si, dans $+1-1=0$, le zéro donne une nullité de quantité. L'équation $\frac{1}{1-1}=1+1+1+1+1$, etc. est donc la représentation d'un tout égal à rien.

La seconde suite $1+2+4+8$, etc. dont les unités croissent à l'infini non seulement en nombre, mais en dimension, donne cependant une valeur bien inférieure à la première, qui ne croissoit qu'en nombre, puisque étant négative elle est au dessous de rien, suivant le sentiment de l'auteur. C'est ainsi que l'infiniment grand se trouve avili, sa valeur étant moins que rien, absurdité que l'on dit n'être qu'apparente, et les preuves du contraire très

réelles. Mais n'est-il pas plus raisonnable de penser que les preuves de pareilles assertions ne sont qu'apparentes et l'absurdité très réelle, que de croire l'absurdité seulement apparente et les preuves très solides ?

La troisième suite $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, etc. $=2$ ne contient point d'absurdité ; mais comme elle égale 2 qui est un nombre entier, elle n'exprime point une fraction réduite en séries, comme le porte le titre du chapitre intitulé : *Résolution des fractions en suites infinies*, ce qui la rend fausse relativement à ce qu'elle devroit exprimer, parce que l'auteur, au lieu d'employer la vraie formule des fractions $\frac{1}{a-1}$, comme nous avons fait, a employé la formule $\frac{1}{1-a}$, qui donne toujours l'unité entière pour un des termes de la suite.

La quatrième suite $1-1+1-1+1-1+1$ $=\frac{1}{2}$ est une série fausse non seulement quant à sa valeur qui est 1, et non pas $\frac{1}{2}$, comme nous l'avons fait voir, mais quant à sa formation, dont les termes sont alternativement vrais et faux. Ils sont vrais, lorsqu'ils procèdent d'un

dividende et d'un diviseur de même ordre et de même espèce algébrique; ils sont faux, quand le dividende et le diviseur, ou le numérateur et le dénominateur sont de différens ordres et de différentes espèces. Or cette alternative de + et — dans les termes, arrive toujours lorsque la formule a pour diviseur binome deux quantités positives, telles que $\frac{1}{a+1}$ ou $\frac{1}{1+a}$; parce que, après avoir fait le produit du diviseur par le quotient positif, il en faut faire la soustraction, laquelle rendant le dividende de l'opération suivante négatif, tandis que le diviseur constant reste positif, on est obligé de dire + dans —, ce qui rend faux le terme de la série; et comme dans l'opération suivante il faut faire la soustraction de ce produit négatif, qui par là devient positif et de même ordre que son diviseur, le terme quotient se trouve positif; et c'est ainsi que de positifs en négatifs et de négatifs en positifs, les termes de la série se trouvent alternativement vrais et faux.

La cinquième suite, dont les termes sont $1+1-1-1=0, +1+1-1-1=0, +1+1=2$, est une

suite alternative double de la précédente, dans laquelle il faut prendre quatre termes ou deux binomes, l'un positif, l'autre négatif, pour avoir o. Comme cette série est alternative, on doit porter le même jugement sur sa fausseté que sur la précédente.

La sixième suite $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}=\frac{4}{3}$, dont les doubles termes fractionnaires sont alternativement vrais et faux, doit être rejetée comme les deux précédentes, et de même toute autre suite alternative provenant d'une division continuée de l'unité, par un dénominateur binome dont chaque terme est positif.

On voit par l'énumération que nous venons de faire des séries contenues dans le chapitre de la résolution des fractions en suites infinies, qu'aucune ne répond au titre du chapitre des fractions, puisque ce sont des entiers réduits en suites infinies, dont la majeure part sont fausses et absurdes, comme on l'a fait voir par les preuves les plus incontestables.

## DES RAPPORTS.

Toutes les connoissances de l'homme sont bornées à celles des rapports : l'absolu est inaccessible à ses facultés. C'est donc une nécessité de s'en tenir à celle des rapports. Et parce que les rapports les plus faciles à saisir sont ceux de la quantité, objet spécial des mathématiques, il seroit à souhaiter qu'on en rendît l'étude familière, pour passer avec plus d'avantage à la connoissance des rapports civils et moraux relatifs au bien général de la société.

Tout rapport résulte de deux termes comparés, qui doivent être homogènes ou de même espèce. On ne compare pas les odeurs avec les sons, parce qu'ils n'ont aucune mesure commune; Mais on compare les odeurs aux odeurs, les sons aux sons, les positives aux positives, les négatives aux négatives, pour en extraire des rapports ou arithmétiques ou géométriques. Dans le rapport arithmétique, on examine de combien une quantité surpasse l'autre. Dans le rapport géométrique, on considère combien

l'une est contenue dans l'autre. Le résultat de la première comparaison s'appelle différence, celui de la seconde s'appelle quotient. Nous commencerons par l'examen du rapport arithmétique.

*Rapport arithmétique.*

La comparaison que l'on fait de deux quantités pour en connoître la différence, s'appelle rapport ou raison arithmétique. Pour obtenir cette différence, on emploie la soustraction. Soient les deux nombres +8 et +6 de même espèce algébrique; si l'on compare le plus fort au plus foible, en soustrayant le plus foible du plus fort, on aura, pour expression de leur différence, +8—+6. Le signe + qui précède le 6 est un signe de quantité qui indique que la quantité soustraite +6, que l'on nomme conséquent du rapport, est de même espèce algébrique que son antécédent positif +8 dont on l'a retranché. Le signe — qui précède le signe + de quantité est un signe d'opération qui indique la soustraction que l'on a faite. L'expression +8—+6 n'est qu'une opération in-

diquée. Pour l'effectuer, on ôtera +6 de +8, et l'on aura +2 pour restant, qui sera la valeur de la différence positive des deux quantités du rapport, qui indique qu'il faudroit ajouter deux unités au conséquent, pour égaler l'antécédent. Cette différence s'appelle rigoureuse.

Si l'on compare le plus foible au plus fort, on se servira du même signe de soustraction, et l'on aura, pour l'expression de leur différence, +6—+8. Pour effectuer cette soustraction indiquée, comme on ne peut retrancher +8 de +6, on retranchera +6 de +8, dont le restant sera +2 que l'on fera précéder du signe — en cette sorte, —+2 qui sera la valeur de la différence négative entre les deux termes du rapport, qui indique qu'il faudroit retrancher deux unités du conséquent pour égaler l'antécédent. Cette différence s'appelle par emprunt.

Si l'on vouloit avoir la différence de +8 à —6, quantités hétérogènes, qui n'étant point contenues l'une dans l'autre, ne peuvent être retranchées l'une de l'autre, il faudroit préalablement rappeler le conséquent à l'espèce de l'antécédent, pour former un rapport dont les termes

doivent nécessairement être homogènes, ce que l'on obtient par voie de soustraction, en plaçant le signe — d'opération avant le signe de quantité de la grandeur qu'on veut rendre homogène. C'est ainsi que $-6$ devient de même espèce que $+8$, en écrivant $+8$ et $--6$, ce qui ne donne encore point la différence de l'une à l'autre; mais si l'on vient à ajouter les deux quantités rendues homogènes pour en faire une somme, on aura $+14=+8+6$ qui sera la différence de $+8$ à $-6$. Cette différence s'appelle additionnelle, parce qu'elle appartient à l'addition comme opération finale, la soustraction n'étant qu'une opération préliminaire et préparatoire pour rendre les quantités homogènes, et, par là, susceptibles d'addition. On voit par là, que la différence additionnelle appartient à la soustraction et à l'addition; à la première, comme opération préliminaire, et à l'addition, comme opération finale.

Cette exposition donne la solution d'une assertion inintelligible qu'on trouve dans certains livres d'algèbre où il est dit, *que soustraire n'est pas toujours diminuer*, parce que quand d'un bien on soustrait une dette, on augmente

réellement le bien. Mais comment faire pour soustraire une dette d'un bien, ou, autrement, une négative d'une positive, la négative ne pouvant être contenue dans la positive, ni la privation d'un bien dans une position de bien? Il est visible qu'en pareil cas la soustraction rend homogènes des quantités qui ne l'étoient point, et ne va pas plus loin. L'opération subséquente qui réunit ces quantités rendues homogènes, n'appartient en rien à la soustraction. C'est donc une chose certaine que soustraire c'est toujours diminuer, parce que soit que l'on soustraie unités positives d'unités positives, unités négatives d'unités négatives, les seuls cas où la soustraction puisse avoir lieu, le nombre des unités de l'espèce soustraite diminuera toujours.

Le rapport arithmétique se prend également dans l'ordre négatif. Le rapport de $-8$ à $-6$ sera $-8 - -6 = -2$; celui de $-6$ à $-8$ sera $-6 - -8 = +2$. Quant à la différence de $-8$ à $+6$, à laquelle on ne peut donner le nom de rapport arithmétique, les quantités n'étant point homogènes, on les rendra telles

par voie de soustraction, en écrivant $-+6$, conséquent du rapport homogène à son antécédent $-8$, dont la somme $-8-+6=-14$ sera la différence requise de $-8$ à $+6$, puisque $+6$ et $-14$ donnent exactement $-8$.

Un rapport arithmétique reste le même, soit que l'on ajoute ou que l'on retranche de chaque terme une même quantité. Le rapport arithmétique de 6 à 3 restera le même en ajoutant le même nombre 4 à l'un et à l'autre terme, puisqu'on aura $6+4$ et $3+4$, ou 10 et 7, dont la différence 3 est la même que de 6 à 3. On aura pareillement la même différence en retranchant le même nombre 2 de chaque membre, ce qui donnera $6-2$ et $3-2$, ou 4 et 1, dont la différence est toujours 3.

Plus l'antécédent d'un rapport arithmétique est grand relativement à son conséquent, plus le rapport est grand. Le rapport de 18 à $6=12$ est plus grand que celui de 10 à $6=4$.

Pour indiquer un rapport arithmétique, on sépare par un point le conséquent de l'antécédent, en cette sorte, $a \cdot b$; mais comme le point ainsi placé est un signe de multiplication, pour

éviter l'équivoque on placera le point plus bas, en cette sorte, *a.b.*

*Proportion arithmétique.*

Lorsque l'on compare deux quantités pour en obtenir la différence, il en résulte un rapport arithmétique. Lorsque l'on compare deux rapports arithmétiques pour en former une égalité, il en résulte une proportion arithmétique. C'est ainsi que l'égalité des rapports 8.6 et 7.5 donne la proportion $+8.+6:+7.+5$; celle des rapports 6.8 et 5.7 donne $+6.+8:+5.+7$. Il faut observer que la différence des rapports qui composent la proportion doit être de même espèce; telles sont celles des deux exemples précédens, la différence de $+8$ à $+6$ étant $+2$, et celle de $+7$ à $+5$ étant également $+2$. La différence de $+6$ à $+8$ du second exemple est $-2$, et celle de $+5$ à $+7$ est pareillement $-2$.

Dans un rapport arithmétique le conséquent plus ou moins la différence du rapport est égal à l'antécédent. Dans le rapport arithmétique de 8 à 6 le conséquent 6 plus la différence 2 est égal à 8. Dans le rapport de 6 à 8 le consé-

quent 8 moins la différence 2 est égal à 6, antécédent du rapport.

### PROPOSITION FONDAMENTALE.

*Dans toute proportion arithmétique, la somme des extrêmes est égale à celle des moyens.*

Démonstration. Soit $a$ le premier terme de la première raison ou du premier rapport, $c$ le premier terme du second, $d$ la différence commune. La proportion arithmétique résultante sera $a.a+d:c.c+d$. Faisant la somme des extrêmes, on aura $a+c+d$; faisant celle des moyens, on aura $a+d+c$, égalité parfaite, même somme de part et d'autre.

Trois termes d'une proportion arithmétique étant donnés, on trouvera toujours le quatrième en faisant la somme des moyens et retranchant le premier extrême; c'est ainsi que les trois premiers termes de la proportion arithmétique 8. 6:7.$x$ étant donnés, si de la somme 13 des deux moyens on retranche le premier extrême 8, il restera 5, valeur du quatrième terme $x$, parce que la différence du premier rapport 8.6

étant 2, celle du second 7.5 est également 2, preuve de l'égalité des rapports et de la vérité de la proportion. Si les termes donnés étoient de l'ordre négatif, comme, par exemple, $-8.-6 :: -7.-x$, le quatrième terme seroit nécessairement négatif; et faisant la somme des moyens qui est $-13$, on auroit pour quatrième terme $-x = -13 - -8 = -5$.

Si on demandoit quelle quantité a donnée la différence additionnelle $+a+b$ : il suffiroit pour cela de changer $+b$ en $-b$, et la valeur $+a-b$ seroit la quantité à laquelle appartient la différence additionnelle $+a+b$. Si la différence additionnelle étoit dans l'ordre négatif, par exemple, $-a-b$, il faudroit changer $-b$ en $+b$, ce qui est la même chose que de soustraire $-b$, et l'on auroit $-a - -b = -a+b$, expression de la quantité à laquelle appartient la différence additionnelle $-a-b$.

Lorsque dans une proportion arithmétique le même terme sert de conséquent au premier rapport, et d'antécédent au second, la proportion s'appelle continue, et n'est composée que de trois termes, qui s'écrivent en cette sorte,

$-\div 3.5.7$ qui équivaut à la proportion complète 3.5:5.7.

*Progressions arithmétiques.*

Les progressions arithmétiques sont des suites de proportions continues; telle est la progression des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, etc. dans laquelle chaque terme fait la fonction de conséquent et d'antécédent, excepté le premier qui ne peut faire la fonction de conséquent, et du dernier qui ne peut faire celle d'antécédent. Par exemple, si on prend le terme 2 de la suite ci-dessus, il est conséquent du rapport 1.2, et antécédent du rapport 2.3, d'où résulte la proportion arithmétique 1.2:2.3; et comme il en seroit de même de tout autre terme, il s'ensuit qu'une progression arithmétique n'est autre chose qu'une suite de proportions arithmétiques continues.

Pour former une progression arithmétique, il suffit d'avoir le premier terme et la différence du premier au second. Soit le premier terme $a$ et la différence $= d$, on aura pour la progression arithmétique résultante,

A $a$, $+a+d$, $+a+2d$, $+a+3d$, $+a+4d$, etc.

supposant $a=1$, $d=1$, on aura la suite,

B 1, $+1+1$, $+1+2$, $+1+3$, $+1+4$, etc.

laquelle étant réduite donne la suite des nombres naturels,

C 1, $+2$, $+3$, $+4$, $+5$, $+6$, $+7$, etc.

Si dans la progression arithmétique générale A, on prend un terme quelconque, excepté le premier, on observera qu'il est formé du premier terme $a$, plus de la différence $d$ prise autant de fois qu'il a de termes avant lui. Par exemple, le terme $+a+4d$ est composé du premier terme $a$, plus de la différence $d$ répétée quatre fois, même nombre que celui des termes qui le précèdent. Soit pris le cinquième terme de la progression B, $+1+4$, on voit visiblement qu'il est composé du premier terme 1, plus de la différence 1 répétée quatre fois, nombre des termes qui sont avant lui.

Cette considération fait trouver, avec une grande facilité, un terme quelconque d'une progression arithmétique, quelque nombre de termes qu'elle puisse contenir. On demande,

par exemple, le cinquantième terme d'une progression arithmétique, dont le premier terme est 3 et la différence 5; puisqu'on demande le 50e terme, il y a donc 49 termes avant lui : il faudra donc répéter 49 fois la différence 5, c'est-à-dire, multiplier 5 par 49, ce qui donnera 245, à quoi ajoutant le premier terme 3, on aura 248 pour la valeur du 50e terme de la progression.

On peut, par la même considération, insérer entre deux nombres donnés, tant de moyens arithmétiques qu'on voudra. Par exemple, pour insérer quatre moyens proportionnels arithmétiques entre 4 et 19, on prendra la différence entre 4 et 19, qui est 15; on divisera 15 par 5, et le quotient $\frac{15}{5}=3$ sera la différence de la progression qui donnera 4, 7, 10, 13, 16, 19.

La progression A est une formule de progression arithmétique croissante ou ascendante dans l'ordre positif. La suivante est une formule de progression arithmétique décroissante ou descendante dans le même ordre.

D $c, +c-d, +c-2d, +c-3d, +c-4d$, etc.

E $6, +6-1, +6-2, +6-3, +6-4$, etc.

F $6, +5, +4, +3, +2, +1, +0, -1, -2$, etc.

La formule D est une formule de progressions arithmétiques décroissantes dans l'ordre positif, mais dont les termes ne peuvent franchir le zéro pour passer dans l'ordre négatif; ce ne seroit plus la même progression ni la même différence, puisqu'il est impossible d'extraire de zéro des unités positives homogènes à celles qui résidoient dans les termes positifs de la progression. Si la progression arithmétique pouvoit franchir le zéro, il s'ensuivroit que chaque terme négatif que l'on poseroit, effaceroit son correspondant dans l'ordre positif, ce qui bien loin d'augmenter le nombre des termes, le diminueroit continuellement jusqu'à rendre la somme de la progression égale o. Ainsi la progression E ne peut être prolongée au-delà de $+6-6$, et la progression F au-delà de o. Il ne faut pas confondre les différences rigoureuses avec les différences par emprunt qui leur sont opposées. On ne peut pas dire $6-7$ sans passer dans l'ordre négatif, et entrer dans une progression diamétralement opposée à la progression positive que l'on vient de quitter. On voit par là qu'il est impossible

qu'une progression négative ne fasse qu'une seule et même progression avec une progression positive.

L'ordre négatif fournit des progressions arithmétiques croissantes et décroissantes, avec cette différence qu'elles décroissent en valeur en croissant en nombre d'unités ; parce que plus une négative s'éloigne du positif, moins elle a de valeur; — 10 est plus foible que — 4. La formule suivante est celle d'une progression arithmétique dans l'ordre négatif, décroissante en valeur et croissante en nombre d'unités.

G $-a, -a-d, -a-2d, -a-3d, -a-4d$, etc.

H $-1, -1-1, -1-2, -1-3, -1-4$, etc.

I $-1, -2, -3, -4, -5$, etc.

La formule G est l'expression algébrique d'une progression arithmétique dans l'ordre négatif, qui croît en nombre d'unités par l'addition successive de la différence $-d$ à chaque terme de la progression. La progression H est l'application d'une valeur numérique relative aux valeurs littérales de chaque terme et à la forme qu'elles gardent entre elles. La progres-

sion I représente les termes réduits de la progression H, lesquels donnent la progression des nombres naturels prise dans une acception contraire.

L $-c, -c+d, -c+2d, -c+3d, -c+4d$, etc.

M $-6, -6+1, -6+2, -6+3, -6+4$, etc.

N $-6, -5, -4, -3, -2$, etc.

La formule L est l'expression algébrique d'une progression arithmétique décroissante en nombre d'unités et croissante en valeur. Elle décroît en nombre d'unités par l'addition successive d'une différence positive, qui efface autant d'unités négatives qu'elle contient elle-même d'unités positives; d'où il suit que la diminution de ces unités négatives est un accroissement de valeur pour chaque terme suivant. Lorsque le nombre des positives est parvenu à égaler le nombre des négatives, comme on le voit au septième terme de la progression M, $-6+6=0$, la progression se trouve finie et terminée sans pouvoir franchir le zéro; car si on faisoit $-6+7=+1$, le terme $+1$ n'appartiendroit point à la progression négative $-6-5-4$, etc.

mais à la progression de l'ordre positif +1 +2+3+4, etc.

Il y a cinq choses principales à considérer dans les progressions arithmétiques ; le premier et le dernier terme, la différence, le nombre des termes et la somme de la progression. Il suffit de connoître trois de ces cinq choses, pour connoître les autres. Comme notre objet ne concerne que les principes d'algèbre, nous n'entrerons point dans les détails qu'exigeroit la partie complète des progressions.

### *Rapport géométrique.*

Le rapport géométrique est celui qui se trouve entre deux quantités considérées sous l'idée de contenant et de contenu. Il y a un rapport géométrique entre 18 et 6, si l'on considère combien de fois 6 est contenu dans 18. Le résultat de cette comparaison s'appelle *quotient*, parce qu'il exprime combien de fois le conséquent est contenu, en tout ou en partie, dans l'antécédent. 6, par exemple, considéré comme conséquent, est contenu 3 fois dans 18, considéré comme antécédent. Mais si l'on prend 18 pour

conséquent, il n'y aura que le tiers de 18 contenu dans 6, considéré comme antécédent. Si l'on sépare par un trait l'antécédent du conséquent, $\frac{18}{6}$ sera l'expression du premier rapport, et $\frac{6}{18}$ sera celle du second.

Le quotient est un nombre abstrait, affirmatif et positif, de même espèce et de même nature que le multiplicateur, avec lequel il ne diffère que de nom. Le multiplicateur indique combien de fois il faut répéter une quantité pour en former un produit, le quotient indique combien de fois il faut le soustraire, et ce nombre de fois est égal de part et d'autre; par où l'on voit que le rapport géométrique est une division indiquée sous la forme d'une fraction proprement ou improprement dite.

Le rapport géométrique diffère totalement du rapport arithmétique. Dans le rapport arithmétique, où l'on demande de combien une quantité en surpasse une autre, tout est homogène, la quantité qui surpasse, la quantité qui est surpassée, et la quantité dont elle est surpassée. On demande de combien 24 écus surpassent 8 écus? on répond de 16. Dans ce

rapport arithmétique, l'antécédent 24 écus, le conséquent 8 écus, la différence 16 écus, sont des quantités de même espèce, parfaitement homogènes ; mais il n'en est pas ainsi du rapport géométrique, où l'on demande combien de fois 24 écus contiennent 8 écus. La réponse que l'on fait à la question, en disant 3 fois, n'exprime pas des unités homogènes aux nombres 24 et 8 qui expriment des unités d'écus ; unités entièrement hétérogènes à celles de l'antécédent et du conséquent du rapport, qui sont des unités concrètes, tandis que les unités de fois sont des unités abstraites. La distinction de ces unités concrètes et abstraites est une observation importante dans le calcul.

Pour indiquer un rapport géométrique, soit dans l'ordre positif, soit dans l'ordre négatif, on sépare l'antécédent du conséquent par deux points. Pour indiquer le rapport géométrique de 8 à 6, on écrira, 8 : 6, ou comme nous avons dit, en séparant le conséquent de l'antécédent par un trait en forme de fraction, comme $\frac{8}{6}$ ; mais pour cela il faut que les deux termes du rapport soient de même espèce algébrique ; on

ne pourroit pas écrire $-c:+d$, ou $\frac{-c}{+d}$, comme l'indice d'un rapport géométrique, puisqu'il n'existe ni comparaison, ni rapport entre des quantités incomparables et qui se détruisent.

Un rapport géométrique ne change point de valeur, lorsque l'on multiplie et que l'on divise chaque terme du rapport par une même quantité. Soit le rapport géométrique $\frac{6}{2}$; si on multiplie l'un et l'autre terme par 2, on aura $\frac{12}{4}=3$; si on divise l'un et l'autre terme par 2, on aura également $\frac{3}{1}=3$, ce qui donne, de part et d'autre, le même rapport $\frac{6}{2}$. Les rapports géométriques entre les quantités négatives donnent les mêmes quotiens positifs que ceux qui se trouvent entre les quantités positives; $-8$ a le même rapport géométrique à $-6$, que $+8$ à $+6$, parce que le conséquent de chaque rapport est exactement contenu $+3$ fois dans son antécédent; d'où il suit que quoique l'on ne puisse pas écrire $\frac{-18}{+6}$, étant impossible que le $+$ soit contenu dans le $-$, on peut cependant écrire $-+\frac{18}{6}$, ce qui signifie soustraction du quotient positif $+\frac{18}{6}$.

*Proportion géométrique.*

La proportion géométrique consiste dans l'égalité de deux rapports géométriques.

Les deux rapports 12 et 4, 6 et 2 qui ont le même quotient 3, étant égaux, donnent la proportion géométrique 12:4::6:2. Dans toute proportion géométrique composée de quatre termes, il y a toujours un rapport dont les deux termes servent de multiplicateurs au produit des extrêmes et des moyens; et parce que les multiplicateurs sont essentiellement des nombres abstraits, il s'ensuit qu'une progression géométrique quelconque est formée de deux rapports, l'une composée d'unités abstraites, l'autre d'unités concrètes ou censées telles. On peut représenter en général une proportion géométrique par cette formule, $1^{\text{fois}} : b^{\text{fois}} :: a^{t} : b^{t}$.

PROPOSITION FONDAMENTALE.

*Dans toute proportion géométrique le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.*

Démonstration. Soit la proportion géomé-

trique $a:b::c:d$, il s'agit de démontrer que $ad = bc$. Pour y parvenir, donnons à la proportion l'expression fractionnaire $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; multipliant chaque membre par $b$, on aura $a = \frac{bc}{d}$; si on multiplie encore par $d$, on aura finalement, $ad = bc$, équation qui exprime l'égalité entre le produit des extrêmes et celui des moyens, ce qu'il s'agissoit de démontrer.

Trois termes d'une proportion géométrique étant donnés, on trouvera toujours le quatrième en faisant le produit des moyens, et divisant par un des extrêmes; c'est ainsi que l'on trouvera l'inconnue $x$ de la proportion $+a:+b::+c:+x$. On multipliera $+c$ par $+b$, et le produit $cb$ étant divisé par $+a$, donnera l'équation $\frac{cb}{a} = x$. Si les termes donnés étoient dans l'ordre négatif, comme il suit, $-a:-b::-c:-x$, on changeroit les signes du premier rapport pour avoir un rapport abstrait et de vrais multiplicateurs, en cette sorte, $+a:+b::-c:-x$. On multiplieroit $c$ par $b$ que l'on diviseroit par $a$ pour avoir un quotient positif, dont on fera la soustraction, et l'on aura l'équation $-+\frac{cb}{a}$

ou $-\frac{cb}{a}=-x$. Dans cet exemple, le multiplicateur et le quotient sont positifs, parce que le signe — dans ce dernier qui est signe d'opération, ne fait point partie du quotient. Ce procédé est entièrement conforme à la nature des quantités algébriques, qui ne connoissent ni multiplicateurs, ni quotiens négatifs.

Lorsque dans une proportion géométrique un même terme fait la fonction de conséquent d'un rapport, et d'antécédent de l'autre, comme dans cette proportion, $+a:+b::+b:+c$, la proportion s'appelle continue, et on l'écrit comme il suit, $\div\div+a:+b:+c$; mais il faut bien prendre garde de conserver l'homogénéité des termes du rapport, et ne pas écrire $\div\div+a:-b:+c$, ce qui donneroit la proportion fausse et ridicule $+a:-b::-b:+0$, ou $+12:-6::-6+3$, proportion qui est le renversement de toute idée, n'étant pas possible que le *plus* soit au *moins* dans une proportion directe, comme le *moins* est au *plus*. Une telle proportion porte avec elle la démonstration de la fausseté de son principe.

Quoique dans toute proportion géométrique

le produit des extrêmes soit égal au produit des moyens, il ne s'ensuit pas que, lorsque le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, la proportion soit géométrique : par exemple, dans la disposition des quatre termes suivans, +8—4, +6—3, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens; il n'y a cependant point de proportion géométrique, n'y ayant point de vrai rapport, parce que les termes +8 et —4, et +6 et —3, étant hétérogènes entre eux, et d'espèce algébrique opposée, manquent à la condition la plus essentielle de la composition des rapports, qui est l'homogénéité des quantités. Si l'on dit que les physiciens établissent des rapports entre l'espace et le temps qui sont hétérogènes entre eux, en divisant l'un par l'autre, nous dirons que les physiciens et tous autres ne divisent point l'espace par le temps, mais ils divisent l'échelle qui mesure l'espace, par les parties de l'échelle qui mesure le temps; et comme, dans l'une et l'autre échelle, on n'a égard qu'au nombre des parties, elles deviennent par là homogènes entre elles.

Certains algébristes donnent pour théorême, que si quatre grandeurs sont telles, que le produit des extrêmes soit égal au produit des moyens, ces quatre grandeurs seront proportionnelles. Ce théorême n'est vrai que lorsque ces quatre grandeurs composent entre elles deux vrais rapports géométriques, tels que $+8:+6::-4:-3$; mais il se trouve faux dans l'arrangement suivant des mêmes quantités, $+8-4+6-3$, puisqu'il n'y a point de rapport géométrique entre $+8$ et $-4$, ni entre $+6$ et $-3$.

Un rapport géométrique multiplié par un ou plusieurs rapports géométriques, antécédent par antécédent, conséquent par conséquent, s'appelle rapport composé: soient les rapports $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$, le rapport $\frac{ac}{bd}$ qui résultera du produit des deux antécédens et des deux conséquens, est un rapport composé. Si on ajoutoit le rapport $\frac{e}{f}$, on auroit le rapport composé $\frac{ace}{bdf}$, produit des trois rapports simples.

*Progressions géométriques.*

Les progressions géométriques sont des suites de proportions géométriques continues.

Pour former une progression géométrique, le premier terme $a$ et l'exposant $q$ de la progression étant donnés, il suffit de multiplier le premier terme $a$ par les puissances successives de $q$, ce qui donnera la progression géométrique,

A. $a, +aq^1, +aq^2, +aq^3, +aq^4, +aq^5$, etc.

Si l'on fait le premier terme $a$ de la progression $= 1$, l'exposant $q$ peut être égal, plus fort ou plus foible que 1. Dans la première supposition où $q = 1$, la progression donnera la suite des unités puissances B,

B. $1, +1^2, +1^3, +1^4, +1^5, +1^6, +1^7$, etc.

Si l'on fait le premier terme $a = 1$, et $q = 2$, selon la seconde supposition, on aura la progression géométrique croissante en raison double C,

C. $1, +2, +4, +8, +16, +32, +64$, etc.

Si l'on fait le premier terme $a = 1$, et $q = \frac{1}{2}$,

on aura la progression géométrique décroissante en raison sous double D,

D. 1, $+\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{4}$, $+\frac{1}{8}$, $+\frac{1}{16}$, $+\frac{1}{32}$, $+\frac{1}{64}$, $+\frac{1}{128}$, etc.

*Dans toute progression géométrique un terme quelconque est égal au produit du premier par le quotient ou l'exposant élevé à une puissance moindre d'une unité que le rang où se trouve le terme cherché.*

On demande le cinquième terme de la progression géométrique A. Pour le trouver, on élevera l'exposant ou quotient $q$ à une puissance moindre d'une unité que la cinquième, c'est-à-dire, à la quatrième, et on aura $q^4$ que l'on multipliera par le premier terme $a$, et l'expression $aq^4$ sera celle du cinquième terme de la progression géométrique A; ce qui est une conséquence de la formation de la progression géométrique, qui contient les puissances de l'exposant $q$, non pas depuis le premier terme inclusivement, mais depuis le second : c'est pourquoi si on fait $n$ égale au nombre des termes de la progression, en considérant celui que l'on cherche comme le der-

nier, on aura $aq^{n-1}$ pour la formule qui fera trouver le terme cherché d'une progression géométrique.

*Dans une progression géométrique tous les termes, excepté le dernier, sont antécédens, et tous les termes, excepté le premier, sont conséquens.*

Cela posé, soit la progression géométrique $\div\!\!\div aq : aq^2 : aq^3 : aq^4$, etc. Comparant la somme des trois premiers termes antécédens à celle des trois premiers termes conséquens, et un seul antécédent avec son conséquent, on formera l'analogie, $a+aq+aq^2 : aq+aq^2+aq^3 :: a : aq$, dont le produit des extrêmes est sensiblement égal à celui des moyens. Il en eût été de même d'un plus grand nombre de termes.

*Dans une progression géométrique le premier terme est au troisième comme le carré du premier au carré du second; le premier est au quatrième comme le cube du premier est au cube du second.*

En prenant la progression A ci-dessus, on a pour l'expression du théorême, $a : aq^2 :: a^2 : a^2q^2$. Or, en faisant le produit des extrêmes et des

moyens, on a $a^3q^2=a^3q^2$, équation parfaite qui prouve la vérité de la première partie du théorême. Quant à la seconde, on aura $a:aq^3::a^3:a^3q^3$. Or, en faisant le produit des extrêmes et des moyens, on trouve $a^4q^3=a^4q^3$, qui prouve la vérité de la seconde.

*Dans une progression géométrique la somme des termes qui la composent est égale au produit du premier terme multiplié par l'exposant de la progression élevé à une puissance égale au nombre des termes, moins le premier, le tout divisé par l'exposant de la progression, moins l'unité, ce que la formule suivante exprime plus brièvement,* $s=\frac{aq^n-a}{q-1}$

Pour en faire l'application, supposons qu'on demande la somme des sept premiers termes de la progression géométrique C, 1, 2, 4, 8, etc. on aura pour valeur substituée dans la formule, $s=\frac{1\times 2^7-1}{2-1}$, ou $s=\frac{127}{1}=127$, somme des sept premiers termes de la progression géométrique, comme il est facile de le vérifier.

*Dans une progression géométrique le dernier terme est égal au produit du premier*

*par l'exposant de la progression élevé à une puissance moindre d'une unité que le nombre des termes de la progression.*

Supposant le premier terme $= a$, le nombre des termes $= n$, l'exposant $= q$, on aura $aq^{n-1}$, pour la formule qui fera trouver le dernier terme. On demande le septième terme de la progression numérique C. La formule donnera $1 \times 2^{7-1} = 2^6 = 64$ pour valeur du septième terme demandé.

On obtiendra les progressions géométriques dans l'ordre négatif, correspondantes à celles de l'ordre positif, en multipliant le premier terme $-a$ par l'exposant positif $q$, ne pouvant y avoir d'exposans négatifs. C'est ainsi que les produits successifs donneront la formule suivante :

a. $-a, -aq^1, -aq^2, -aq^3, -aq^4$, etc.
b. $-1, -1^2, -1^3, -1^4, -1^5$, etc.
c. $-1, -2, -4, -8, -16$, etc.
d. $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}$, etc.

Ces quatre progressions, a, b, c, d, dans

l'ordre négatif ; sont correspondantes aux quatre précédentes, A, B, C, D, dans l'ordre positif. On opérera sur ces quatre formules, comme sur les premières, en observant de suivre les règles prescrites pour l'ordre négatif, en ne faisant aucun usage des multiplicateurs, des quotiens et exposans négatifs. S'il s'agissoit de faire le produit des extrêmes et des moyens de cette proportion, —1:—2::—4:—8, il faudroit changer les termes négatifs du premier rapport, pour avoir des multiplicateurs positifs, en cette sorte, +1:+2::—4:—8:; et multipliant —4 par +2, et —8 par +1, on auroit —8 = —8 pour l'égalité du produit des extrêmes et des moyens.

Nous avons dit que dans une progression géométrique le premier terme est au troisième, comme le carré du premier est au carré du second. Pour vérifier cette proposition dans l'ordre négatif, on prendra le premier et le troisième terme de la première progression $a$, ce qui formera le premier rapport $-a:-aq^2$; et pour le second, on prendra le carré du premier et le carré du second $-a^2:-a^2q^2$;

égalant ces deux rapports, on aura la proportion $-a:-aq^2::-a^2:-a^2q^2$. Pour faire le produit des extrêmes et des moyens, on disposera la proportion comme il suit, $+a:+aq^2::-a^2:-a^2q^2$, et l'on aura pour le produit des extrêmes, $-a^2q^2\times+a$; et pour le produit des moyens, $-a^2\times aq^2$, qui donneront l'égalité parfaite $-a^3q^2=-a^3q^2$.

*Dans une progression géométrique les sommes des termes immédiatement consécutifs sont en progression géométrique.*

Soit la progression géométrique $\div a:aq^1:aq^2:aq^3:aq^4:aq^5$, etc. Si on suppose $p=2$, elle prendra la forme suivante, $\div a:2a:4a:8a:16a$, etc. dont les sommes des termes consécutifs seront $3a$, $6a$, $12a$, $24a$, lesquels sont évidemment en progression géométrique.

*Dans une progression géométrique les différences des termes immédiatement consécutifs sont en progression géométrique.*

Soit la progression $\div a:2a:4a:8a:16a$, etc. Les différences des termes immédiatement consécutifs seront $a-2a:2a-4a:4a-8a:8a-16a$, dont les termes étant simplifiés, se

réduisent à la progression $-a:-2a:-4a:-8a$, laquelle est visiblement une progression géométrique dans l'ordre négatif, provenant d'une différence par emprunt.

*Dans une progression géométrique les produits des termes qui se suivent immédiatement sont aussi en progression géométrique.*

Soit la progression géométrique $\div a:2a:4a:8a:16a$: etc. Les produits des termes immédiatement consécutifs sont, $2aa:8aa:32aa:128aa$, etc. qui sont évidemment en progression géométrique.

On prouvera aussi facilement, que dans une progression géométrique les puissances de même nom, les carrés, les cubes, les racines carrées, cubiques, etc. des termes consécutifs, sont en progression géométrique ; il en est de même des puissances successives d'une même quantité, $a^1, a^2, a^3, a^4, a^5$, etc. Quant aux racines des termes consécutifs de la quantité $a$, telles que $a^{\frac{1}{1}}, a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{1}{5}}$, etc. elles ne sont point en progression géométrique.

Lorsque l'on a cette suite de termes en progression géométrique affectés de leurs expo-

sans, elle donne une progression double; l'une géométrique, qui règne entre les termes de la suite; l'autre arithmétique, qui règne entre les exposans. La réunion de ces deux expressions est le fondement du calcul des logarithmes.

## DES LOGARITHMES.

Les logarithmes sont des nombres en progression arithmétique qui correspondent terme à terme, à des nombres en progression géométrique.

Les progressions arithmétiques et géométriques qui composent le système ordinaire des logarithmes dans l'ordre croissant, suivent l'arrangement et la disposition des formules suivantes A et B.

A. 0, +1, +2, +3, +4, etc.
B. 1, +10, +100, +1000, +10000, etc.

La formule B est une progression géométrique croissante en raison décuple, à laquelle correspond terme à terme la progression arithmétique croissante des nombres naturels qui en

sont les logarithmes. La progression géométrique a pour quotient ou pour raison le nombre 10, et la progression arithmétique a pour différence l'unité positive. Dans cet ordre croissant tout est bien ordonné, tout est régulier; les logarithmes exposans indiquent positivement le degré des puissances auxquelles ils répondent. Il s'agit de savoir si l'on en pourra autant dire de l'ordre décroissant représenté par les formules suivantes C et D, sujet principal de nos observations sur les logarithmes.

C. $4-\quad 3-\quad 2-\quad 1-\quad 0)+1+2$, etc.

D. $\frac{1}{10000}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{100}+\frac{1}{10}+1+10+100$, etc.

Dans cet ordre décroissant, si on prend cinq termes de la progression D, en commençant par la gauche, et qu'on divise 100 par 10, on aura 10 pour quotient; si on divise 10 par 1, on aura 10 pour quotient; si on divise 1 par $\frac{1}{10}$, on aura 10; si on divise $\frac{1}{10}$ par $\frac{1}{100}$, on aura toujours 10 pour quotient; par où l'on voit que la même raison 10 règne dans toute l'étendue de la progression géométrique.

Prenant également cinq termes de la progression arithmétique C, en commençant par la gauche, et soustrayant + 1 de + 2, on aura + 1 pour différence ; si on soustrait 0 de + 1, ou aura + 1 pour différence. Mais, à présent, comment faire pour soustraire l'unité de zéro, qui ne peut contenir que des zéro, ou des quantités au dessous de zéro ? Dans la première supposition, tous les logarithmes des quantités fractionnaires seront des zéro. Dans la seconde supposition, ce seront des quantités négatives nécessairement au dessous de zéro. M. Bézout, en admettant les logarithmes négatifs, n'est pas le maître de les considérer autrement qu'au dessous de zéro. Il dit dans le premier volume de son Cours de Mathématiques à l'usage de la marine, pag. 231, que « c'est prendre une idée fausse de pareilles « quantités négatives, que de les regarder « comme des nombres au dessous de zéro. Il « n'y a rien au dessous de zéro. »

Mais lorsqu'une quantité, pour former une progression arithmétique, doit être supposée autant au dessous de zéro, que le terme pré-

cédent est au dessus, ou il faut admettre cette idée fausse, ou rejeter les logarithmes négatifs; et ce dernier parti, M. Bézout ne le prend pas.

L'auteur du Dictionnaire portatif de physique, en 4 volumes, s'exprime ainsi sur les logarithmes des fractions : « Les fractions ont « des logarithmes, j'en conviens, mais ce sont « des logarithmes affectés du signe —, des lo- « garithmes négatifs, et par conséquent des « logarithmes qui répondent à des quantités « moindres que zéro. » En effet, il est impossible de concevoir autrement les logarithmes négatifs. Et parce que cette idée est fausse, selon M. Bézout, et ceux qui pensent vrai, il s'ensuit qu'il n'y a point de logarithme négatif.

Si les logarithmes négatifs pouvoient avoir lieu, et si une progression arithmétique pouvoit franchir le zéro qui est sa limite, les termes négatifs qui suivroient, détruiroient les termes correspondans positifs qui précèdent, et rendroient nulle la progression, puisque c'est une propriété essentielle aux quantités positives et négatives de s'effacer réciproquement. Cette

raison seule est capable de décider la question. On voit évidemment que dans la progression $3+2+1+0-1-2-3$ les termes négatifs, qui suivent le zéro, effacent totalement les termes positifs qui le précèdent.

On doit porter le même jugement sur les exposans négatifs, que sur les logarithmes négatifs qui remplissent les fonctions d'exposans. Tous les auteurs avouent que l'on a peine à comprendre ce que c'est qu'un exposant négatif. En effet, une quantité au dessous de rien est une quantité inintelligible.

Pour prouver l'imperfection du système ordinaire des logarithmes, il suffit de rapporter ce qui est à la tête des tables portatives des logarithmes, conçu en ces termes :

« Soit une progression géométrique $a^{-3}$, $+a^{-2}$, « $+a^{-1}$, $a^{0}$, $+a^{1}$, $+a^{2}$, $+a^{3}$, etc. chacun de ces « exposans s'appelle le logarithme du terme « auquel il appartient; ensorte que si $a=10$, « $-3$ sera le logarithme de $\frac{1}{1000}$, $-2$ celui « de $\frac{1}{100}$, $-1$ celui de $\frac{1}{10}$, 0 celui de l'unité, « 1 celui de 10, etc. Les tables des logarithmes « ont été calculées d'après cette supposition. »

Si les tables des logatithmes ont été calculées d'après cette supposition, il est constant que les seuls logarithmes positifs seront vrais et utiles, et que les logarithmes négatifs n'ayant ni fondement, ni existence, étant au dessous de rien, ne peuvent servir de rien au calcul des fractions, dont les logarithmes sont tous dans l'ordre des zéro, parce que du dernier terme o de la progression arithmétique, on n'en peut extraire que des zéro, comme on le voit ci-après.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| o | o | o | o | o | o |
| 1 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{100}$ | $\frac{1}{1000}$ | $\frac{1}{10000}$ | $\frac{1}{100000}$ |

Pour remédier à cet inconvénient, et ne pas laisser la progression géométrique des fractions sans logarithmes, les algébristes ont fait glisser les logarithmes positifs de la progression géométrique croissante des nombres entiers, sur les termes fractionnaires de la progression géométrique décroissante; ensorte que l'unité, qui avoit zéro pour logarithme, s'est trouvée avoir 10, et les termes fractionnaires qui n'en avoient

point, ont eu 9, 8, 7, 6, etc. comme on le voit dans les progressions ci-après.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5, etc. |
| 1 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{100}$ | $\frac{1}{1000}$ | $\frac{1}{10000}$ | $\frac{1}{100000}$, etc. |

On a donné le nom de logarithmes artificiels à ces logarithmes empruntés, qui mériteroient, à plus juste titre, le nom de logarithmes naturels, comme étant positifs, et conservant entre eux la même différence.

L'auteur des Tables portatives des logarithmes dit, page 5, « que si l'on veut éviter les « caractéristiques négatives, on en viendra aisé- « ment à bout, en prenant 9, 8, 7, 6, etc. « pour logarithmes des fractions $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, « $\frac{1}{10000}$, etc. »

On pourroit demander en conséquence, si es caractéristiques négatives sont vraies, ou si elles sont fausses. Si elles sont vraies, pourquoi les éviter ? si elles sont fausses, pourquoi s'en servir, comme l'auteur le fait ? On ne peut pas dire qu'on évite les caractéristiques négatives, parce que les logarithmes artificiels

sont plus commodes, puisqu'après l'opération il faut revenir sur ses pas pour la rectifier. C'est donc parce que les caractéristiques négatives sont fausses, comme le sont tous les exposans négatifs, qu'il faut les éviter.

« Ce que nous avons dit jusqu'à présent, « continue le même auteur, n'est fondé que « sur des principes élémentaires ; il s'agit de « faire voir, en peu de mots, comment les « théories nouvelles ont simplifié et généralisé « le calcul des logarithmes.

« Et d'abord, pour ne pas nous arrêter à « des séries peu convergentes, nous passerons « à celle que M. Halley publia en 1695, dans « les Transactions philosophiques. Voici à peu « près la démonstration que M. Euler en a « donnée, *introd. in analysim inf. T. I. C.* « *VII.* Elle est plus analogue à la définition « généralement reçue des logarithmes, que celle « de M. Halley. Quelle que soit la valeur de $a$, « on aura toujours $a^0 = 1$ ; donc $a^{0+r} =$ quelque « chose de plus que l'unité.

Rép. C'est une vérité constante qu'une quantité quelconque multipliée par zéro, donne

zéro ; et parce qu'un exposant est un véritable multiplicateur, il s'ensuit que $a^{o}=o$, et $a^{o+r}=o+r$; donc $a^{o+r}$ n'est pas quelque chose de plus que l'unité. Donc les conséquences qu'on déduira de ce principe faux seront des conséquences erronées; et elles le sont en effet, comme on va le voir dans les exemples suivans extraits des pages 11 et 12 des mêmes Tables.

1er.

$$\frac{n}{p}(1+x)^{\frac{1}{n}}=\frac{n}{p}+\frac{x}{p}-\frac{x^2}{2p}+\frac{x^3}{3p}-\frac{x^4}{4p}, \text{ etc.}$$

2e.

$$\text{L.}(1-x)=-\frac{1}{p}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}, \text{ etc.}\right.$$

3e.

$$\text{L.}(1+x)=\frac{1}{p}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}, \text{ etc.}\right.$$

Ces trois exemples sont autant d'erreurs. Pour le prouver, nous prendrons seulement trois termes de chacune des progressions.

La première donne la fausse proportion

$+\frac{x}{p} : -\frac{x^2}{2p} :: -\frac{x^2}{2p} : +\frac{x^3}{3p}$, et la fausse équation $+\frac{x^4}{3p^2} = -+\frac{x^4}{4p^2}$.

La seconde donne la fausse proportion $-\frac{x^2}{c^2} : +\frac{x^3}{x^3} :: +\frac{x^3}{x^3} : -\frac{x^4}{x^4}$, et la fausse équation $- + \frac{x^6}{x^6} = + \frac{x^6}{x^6}$.

La troisième donne la fausse proportion $-\frac{x^2}{2} : +\frac{x^3}{3} :: +\frac{x^3}{3} : -\frac{x^4}{4}$, et la fausse équation $+\frac{x^5}{9} = -+\frac{x^6}{8}$.

On peut voir dans la résolution des fractions en suites infinies, pag. 166, extraites de l'Analyse déterminée, le vice et la fausseté de pareilles suites, dans lesquelles les termes sont alternativement vrais et faux. On observera de plus, que les fausses proportions géométriques se manifestent spécialement dans les numérateurs des termes fractionnaires contenus dans les trois exemples précédens.

Nous proposerons la manière de noter les logarithmes des fractions décimales, qui ne

peuvent être que positifs, puisque l'exposant de la seconde puissance de 0,1 doit être le même que celui de la seconde puissance de 10, c'est-à-dire 2.

## LOGARITHMES.

| *Ordre croissant.* | | | | | *Ordre décroissant.* | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1. | 2. | 3. | 4. |
| 10000 | 1000 | 100 | 10 | 1 | 0,1 | 0,01 | 0,001 | 0,0001 |

L'*ordre croissant* commence par l'unité, en allant de droite à gauche. L'*ordre décroissant* commence par la même unité, en allant de gauche à droite.

A l'ordre croissant appartient le calcul des nombres entiers; et à l'ordre décroissant, le calcul des fractions décimales. Et parce que dans les fractions décimales on n'écrit point le dénominateur de la fraction qui est facile à connoître, on opérera sur l'un et l'autre ordre de la même manière.

## PROBLÊME PREMIER.

On demande, dans l'ordre croissant, le produit de 50 par 25; et dans l'ordre décroissant, celui des fractions décimales 0,50, et 0,25 ?

### RÉSOLUTION.

On cherchera les logarithmes de 50 et de 25, qui sont 1,698970 et 1,397940; on ajoutera ces deux logarithmes, et leur somme 3,096910 sera le logarithme auquel répond le nombre 1250 dans les tables, produit exact des nombres entiers 50 et 25.

Quant au produit des fractions décimales 0,50 et 0,25, on cherchera également dans les tables les logarithmes de 50 et de 25, dont la somme 3,096910 sera le logarithme, auquel répond le nombre 1250 que l'on rendra fractionnaire en le faisant précéder d'un o suivi d'une virgule, en cette sorte : $0,1250 = \frac{1250}{10000}$. Comme $0,50 = \frac{1}{2}$, et $0,25 = \frac{1}{4}$, la fraction-produit 0,1250 doit être égale à $\frac{1}{8}$, produit de $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{4}$, ce qui se trouve vrai, puisqu'on a la proportion 1:8::1250:10000, dont le produit

des moyens étant égal au produit des extrêmes, donne $\frac{1}{8} = \frac{1250}{10000}$; d'où il suit que pour opérer sur les fractions ordinaires par logarithmes positifs, il suffit de réduire les fractions ordinaires en fractions décimales, et procéder comme sur les nombres entiers, ce qui est évident; car si on proposoit de trouver le produit de $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{4}$, en employant les seuls logarithmes positifs, on changeroit $\frac{1}{2}$ en 0,50, et $\frac{1}{4}$ en 0,25, c'est-à-dire, les fractions ordinaires en décimales, en procédant pour le reste comme on a fait dans la résolution du problême.

## PROBLÊME II.

On demande dans l'ordre croissant le quotient de 50 par 25, et dans l'ordre décroissant le quotient de 0,50 par 0,25?

### RÉSOLUTION.

On cherchera les logarithmes de 50 et de 25, qui sont 1,698970 et 1,397940; on soustraira le second du premier, et le restant 0,301030 sera le logarithme du nombre 2, quotient de 50 par 25.

Quant au quotient des fractions décimales 0,50 et 0,25, on cherchera dans les tables les

logarithmes de 50 et de 25, comme on vient de faire pour les nombres entiers; on soustraira le plus foible du plus fort, et le restant 0,3010300, sera le logarithme du nombre 2, quotient de 0,50 par 0,25, le même que pour les nombres entiers, puisque l'on a $50:25::\frac{50}{100}:\frac{25}{100}$. Il faut faire attention qu'un quotient quelconque est un nombre abstrait, dont les unités sont des unités de fois; ensorte que le quotient 2 que l'on a obtenu, indique simplement que la fraction décimale $\frac{25}{100}$ est contenue deux fois dans la fraction décimale $\frac{50}{100}$, comme 25, nombre entier, est contenu dans le nombre entier 50, ce qui est facile à vérifier, en divisant $\frac{50}{100}$ par $\frac{25}{100}$, suivant les règles ordinaires, car on aura $\frac{50}{100} \times \frac{100}{25} = \frac{5000}{2500}$ $= 2$, comme on l'a trouvé par les logarithmes.

## PROBLÊME III.

On demande dans l'ordre croissant la seconde puissance de 50, et dans l'ordre décroissant celle de 0,50 ?

### RÉSOLUTION.

On cherchera dans les tables le logarithme de

50, qui est 1,698970, que l'on doublera, et la somme résultante 3,397940, sera le logarithme du nombre 2500, seconde puissance de 50, nombre proposé. On suivra le même procédé pour l'ordre décroissant; on cherchera le logarithme de 50, lequel étant doublé, donnera 3,397940 pour logarithme de 2500, nombre entier, que l'on rendra fractionnaire, en le faisant précéder d'un zéro suivi d'une virgule, en cette sorte: 0,2500, expression de la seconde puissance de la fraction 0,50, ou de la fraction $\frac{1}{2}$, dont la seconde puissance est $\frac{1}{4}$. En effet, on a pour l'expression des secondes puissances de $\frac{1}{2}$ et de 0,50, l'équation suivante, $\frac{1}{4} = \frac{2500}{10000}$.

## PROBLÊME IV.

On demande dans l'ordre croissant la racine carrée du nombre entier 2500, et dans l'ordre décroissant, celle de 0,2500?

### RÉSOLUTION.

On cherchera dans les tables le logarithme de 2500, qui est 3,397940; on en prendra la moitié qui est 1,698970; ce logarithme sera

celui auquel répond le nombre 50, racine de 2500. On procédera de même pour l'ordre décroissant; on prendra la moitié du logarithme de 2500; et après avoir trouvé la racine 50 qui répond au logarithme 1,698970, on la fera précéder d'un zéro suivi d'une virgule, comme il suit: 0,50; ce sera la racine du nombre fractionnaire 0,2500.

On peut également faire l'application des logarithmes positifs aux quantités de l'ordre négatif.

Pour faire le produit de —125 par 46, on prendra les logarithmes de 125 et de 46, qui sont 2,096910, et 1,662758, dont la somme 3,759668 sera le logarithme de 5750. Ce dernier nombre précédé du signe —, donnera — 5750 pour produit de — 125 par 46. En effet, le produit de — 125 par 46, est exactement — 5750. Si les facteurs eussent été — 125 et — 46, on en auroit rendu un des deux positif, en procédant pour le reste, comme on a fait ci-dessus.

Pour diviser — 5750 par — 125, on prendra le logarithme de 5750, dont on retranchera

celui de 125 ; le logarithme restant 1,662758, sera le logarithme du quotient positif 46.

Pour avoir le carré de — 125, on doublera le logarithme de 125, et la somme 4,193820 sera le logarithme de 15625. Ce dernier nombre précédé du signe — est le véritable carré de — 125, lequel n'est autre chose que — 125 répété 125 fois.

Pour extraire la racine carrée de — 15625, on cherchera le logarithme de 15625, dont on prendra la moitié qu'on trouve être 2,096910, logarithme de la racine 125. Ce nombre précédé du signe — donnera — 125, racine négative de même espèce algébrique que sa puissance — 15625.

On voit par ces opérations que les logarithmes positifs servent également au calcul des nombres négatifs, comme à celui des nombres positifs, ce qui termine le différent entre les géomètres, dont les uns soutiennent, avec raison, que les logarithmes des quantités négatives sont réels, et les autres qu'ils sont des quantités imaginaires. L'auteur de l'Analyse déterminée est de ce dernier sentiment. Il dit positivement,

pag. 167, que les logarithmes des nombres négatifs sont impossibles, et qu'ils appartiennent à la classe des imaginaires.

Les méthodes pour opérer sur les fractions par logarithmes, sont si multipliées, qu'on ne sait à laquelle s'en tenir. Voici un exemple extrait des Tables portatives des logarithmes, pag. 23, où il est dit : « On trouveroit de même que le logarithme de $\frac{1}{14321}$ peut s'exprimer de ces trois manières : 5,265032, $-5+\frac{265032}{1000000}$, —4734968; nous préférons la première, comme plus commode. »

Voilà trois manières différentes d'exprimer les logarithmes d'une fraction, dont la première est artificielle, et les deux dernières sont visiblement fausses. La seconde pèche contre les premières règles du calcul, qui prescrivent qu'une somme quelconque doit être composée d'unités homogènes et de même espèce ; et celle-ci est composée de 5 unités négatives, et de 265032 parties d'unités positives. La troisième est composée d'unités négatives, nécessairement au dessous de zéro, où le réel finit.

On voit par là et par ce qui précède, que

le système des logarithmes négatifs est entièrement défectueux, faux et déraisonnable ; et que celui des logarithmes positifs est le seul vrai, conforme aux bonnes règles. Comme les logarithmes artificiels sont dans l'ordre positif, et conservent entre eux une même différence, ils peuvent suppléer et réparer les imperfections des logarithmes négatifs.

En réfléchissant sur le grand nombre d'erreurs qui résultent des principes anciens, et sur le grand nombre de vérités qui émanent des nouveaux, nous établirons une échelle de comparaison sous le nom de calcul ancien et calcul nouveau, qui en fera saisir plus aisément la différence.

## DIFFÉRENCE

### ENTRE

### LE CALCUL ANCIEN ET LE CALCUL NOUVEAU.

Dans *le calcul ancien,* on croit voir distinctement les multiplicateurs existans dans les produits ; dans *le nouveau,* on n'en voit aucun.

Dans *le calcul ancien*, on dit — par —

donne +; dans *le nouveau*, on dit — de — donne +: alors ce n'est pas multiplier, c'est soustraire.

Dans *le calcul ancien*, les racines imaginaires sont de la plus grande utilité; dans *le nouveau*, les racines imaginaires, nombres impossibles et pures chimères, ne servent à rien du tout.

Dans *le calcul ancien*, on apperçoit une vraie proportion géométrique entre ces quatre quantités, $-1:+4::+4:-16$; dans *le nouveau*, on n'y voit qu'une absurdité.

Dans *le calcul ancien*, soustraire n'est pas toujours diminuer, et ajouter n'est pas toujours augmenter; dans *le nouveau*, soustraire est toujours diminuer, et ajouter est toujours augmenter.

Dans *le calcul ancien*, le mélange des positives et négatives donne une somme; dans *le nouveau*, il donne une différence.

Dans *le calcul ancien*, faire le carré de $-3$, c'est répéter $-3$ moins trois fois; dans *le nouveau*, c'est répéter et écrire $-3$ plus trois fois $=-3-3-3=-9$.

Dans *le calcul ancien*, le signe — fait partie du quotient; dans *le nouveau*, le signe —, signe d'opération, est hors du quotient, et n'en fait nullement partie.

Dans *le calcul ancien*, une équation composée a autant de racines que de facteurs; dans *le nouveau*, toute équation composée n'a qu'une racine, par la raison qu'un produit n'a qu'un multiplicande, et qu'on ne dit pas extraire les racines, mais la racine d'un produit.

Dans *le calcul ancien*, les signes d'insolubilité d'un problème sont les racines imaginaires; dans *le nouveau*, ce sont les excès sur le *maximum*.

Dans *le calcul ancien*, on voit clairement les exposans et logarithmes négatifs au dessous de rien; dans *le nouveau*, on ne voit rien au dessous de rien.

Dans *le calcul ancien*, la série $1+a^1+a^2+a^3+a^4+a^5$, etc. est composée de quotiens; dans *le nouveau*, elle est composée de produits.

Dans *le calcul ancien*, les carrés de $+5-2$ et $-5+2$, sont égaux; dans *le nouveau* ils sont diamétralement opposés, le premier donnant $+9$, et le second $-9$.

Dans *le calcul ancien*, on divise les produits par les multiplicateurs abstraits, et le quotient donne le multiplicande concret; dans *le nouveau*, on divise le produit par le multiplicande concret, et le quotient donne toujours le multiplicateur abstrait.

Dans *le calcul ancien*, les équations-puissances du second degré donnent deux réponses à une même question; dans *le nouveau*, ce sont les seules équations-produits, les équations-puissances n'en pouvant donner qu'une.

Dans *le calcul ancien*, la suite $\frac{10}{10}$, $\frac{100}{100}$, $\frac{1000}{1000}$, $\frac{10000}{10000}$ donne les unités linéaires 1, 1, 1, 1; dans *le nouveau*, cette suite donne les unités-puissances 1, $1^2$, $1^3$, $1^4$, de même dimension que les puissances dont elles sont la mesure.

Dans *le calcul ancien* $a^0$ donne 1; dans *le nouveau*, $a^0$ donne 0, parce qu'une quantité quelconque multipliée par 0, donne 0, et que l'exposant 0 fait la fonction de multiplicateur, selon la règle des exposans.

Dans *le calcul ancien*, l'équation $x^3-1=0$ donne les trois racines suivantes : 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$,

$\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, dont une réelle et deux imaginaires; dans *le nouveau*, $x^3=1^3$ donne 1 pour racine unique, les deux autres qui procèdent d'un excès sur le *maximum*, étant nulles et de nul effet.

Dans *le calcul ancien*, les signes + + et — — de quantité et d'opération sont confondus; dans *le nouveau*, ils sont distingués et articulés.

Dans *le calcul ancien*, les ordonnées négatives adhèrent à des axes positifs; dans *le nouveau*, les ordonnées négatives adhèrent à des axes négatifs.

Dans *le calcul ancien*, les courbes symétriques sont amphibies, moitié d'une espèce, moitié d'une autre, moitié positives, moitié négatives; dans *le nouveau*, les courbes symétriques sont toutes d'une même espèce, totalement positives, ou totalement négatives.

Dans *le calcul ancien*, les paramètres qui passent par le foyer des courbes, sont composés de deux ordonnées hétérogènes, dont l'une est de l'ordre positif, et l'autre de l'ordre négatif; dans *le nouveau*, le paramètre est composé de deux ordonnées homogènes, de même

ordre et de même espèce que la courbe dont il est le paramètre.

Dans *le calcul ancien*, rien de plus compliqué et de plus embrouillé que l'analyse des équations composées; dans *le nouveau*, une seule formule suffit pour toutes.

Le tableau que nous venons d'offrir aux yeux et à l'intelligence du lecteur, lui donnera une idée juste de la différence des deux systêmes, dont il découvrira aiséme.it la cause, s'il fait attention que les analystes et géomètres s'étant toujours plus occupés de l'élévation de l'édifice que de sa solidité, ont négligé l'examen du sol sur lequel il étoit assis; ce qui a fait dire à un grand mathématicien, que si la postérité ne connoissoit la géométrie et l'analyse moderne, que par les éloges qu'on lui prodigue, et les noms pompeux qu'on lui donne, elle en auroit une idée peu juste.

Dans tout édifice le fondement en est la partie principale et la plus intéressante; cependant dans le calcul algébrique, c'est celle à laquelle on a fait le moins d'attention. Les analystes, en posant pour principe de calcul *moins*

*par moins donne plus*, ont pris une base imaginaire pour une base réelle ; et faisant entrer les multiplicateurs dans les produits, ils ont pris pour partie de l'édifice les instrumens qui servoient à sa construction. En effet, les multiplicateurs composés d'unités de fois, unités abstraites, servent comme d'instrumens pour former les produits, en indiquant combien de fois le multiplicande doit être répété ; et parce que les équations composées ne sont que des produits, ils indiquent pareillement combien de fois le multiplicande, sous le nom de racine, doit être répété pour former l'équation. On voit par là que les multiplicateurs ne font jamais partie ni des produits, ni des équations composées.

FIN DU TOME PREMIER.

# TABLE

## DES MATIÈRES CONTENUES EN CE VOLUME.


| | |
|---|---|
| *Introduction*, | page 1 |
| *Plan de l'ouvrage*, | 5 |
| *Définition et propriétés de l'Algèbre*, | 19 |
| *De la Quantité*, | 21 |
| *Des Lettres*, | 25 |
| *Des Chiffres*, | 27 |
| *Des Signes*, | 31 |
| *Addition algébrique*, | 35 |
| *Soustraction algébrique*, | 42 |
| *Multiplication algébrique*, | 49 |
| *Division algébrique*, | 87 |
| *Fractions algébriques*, | 112 |
| *Formation des Puissances monomes*, | 119 |
| *Formation des Puissances binomes*, | 125 |
| *Calcul des Puissances*, | 139 |
| *Calcul des Radicaux*, | 147 |
| *Résolution des Fractions en suites infinies*, | 159 |
| *Des Rapports*, | 176 |
| *De la Proportion arithmétique*, | 182 |

*Des Progressions arithmétiques*, page 185
*Proportion géométrique*, 195
*Progressions géométriques*, 200
*Des Logarithmes*, 208
*Différence entre le Calcul ancien et le Calcul nouveau*, 226

FIN DE LA TABLE.

## FAUTES A CORRIGER.

PAGE 41, lig. 2, ou un bien; *lisez* et un bien.
67, lig. 8, dix ans; *lisez* neuf ans.
206, lig. 13, $p = 2$; *lisez* $q = 2$.
209, lig. 16, par la gauche; *lisez* par la droite.
210, lig. 3, par la gauche; *lisez* par la droite.
217, lig. 2. $+\frac{x^4}{3p^2}$; *lisez* $+\frac{x^4}{4p^2}$.